F.-H. Vasilescu

Inițiere în teoria operatorilor liniari

Editura Tehnică

FLORIAN-HORIA VASILESCU

INIŢIERE ÎN TEORIA OPERATORILOR LINIARI

EDITURA TEHNICĂ
BUCUREŞTI — 1987

Lucrarea de față cuprinde o parte însemnată din problematica de bază a teoriei operatorilor liniari. Sînt înfățișate construcția calculului funcțional analitic în algebre Banach, descompunerea spectrală a operatorilor normali și autoadjuncți (inclusiv cei nemărginiți), cîteva clase speciale de operatori, între care operatorii compacți și operatorii Fredholm, precum și unele aplicații ale acestei teorii la rezolvarea ecuațiilor diferențiale, integrale și la soluționarea altor probleme din fizica matematică, în particular din mecanica cuantică.

Materialul principal este abordat direct, preliminariile fiind reduse la minim, iar prezentarea sa se axează pe conceptul unificator de calcul funcțional.

Lucrarea este adresată tuturor persoanelor care doresc să se inițieze în teoria operatorilor liniari, precum și celor care urmăresc aplicarea acestei teorii în fizica matematică și în alte domenii ale cunoașterii.

PREFAŢĂ

Una din problemele pe care le ridică elaborarea unei lucrări de iniţiere în teoria operatorilor liniari este legată de volumul şi consistenţa preliminariilor. Într-adevăr, pentru parcurgerea şi asimilarea unui asemenea material, cititorul are nevoie de numeroase cunoştinţe de analiză matematică şi analiză funcţională, de teoria funcţiilor de variabilă reală şi complexă, precum şi de algebră liniară şi elemente de topologie. Astfel de cunoştinţe sînt la îndemîna doar a unui absolvent a cel puţin trei ani de studiu ai unei facultăţi de matematică. Pe de altă parte, atracţia pentru metodele şi aplicaţiile teoriei operatorilor liniari este în continuă creştere, în rîndul celor interesaţi aflîndu-se şi persoane din a căror pregătire matematică lipsesc unele din capitolele menţionate. Pentru a veni în ajutorul unor asemenea cititori, evitînd totuşi ca preliminariile să se transforme în scop în sine, autorul prezentei lucrări a elaborat un capitol introductiv în are sînt trecute în revistă principalele concepte şi rezultate folosite ulterior, demonstraţiile fiind cn general omise (pentru ele făcîndu-se însă trimiteri la alte lucrări, uşor accesibile). Sperăm ca această modalitate, utilizată de altfel în numeroase tratate de matematică, să permită o familiarizare rapidă a cititorului cu terminologia şi rezultatele de bază utilizate în lucrare, netezindu-se astfel calea către problematica propriu-zisă.

În afara capitolului preliminar, lucrarea conţine alte cinci capitole. Primul capitol este consacrat ideii de calcul funcţional analitic, concept unificator al întregii lucrări. Aici sînt incluse şi două secţiuni privitoare la integrarea şi, respectiv, analiticitatea funcţiilor cu valori vectoriale secţiuni a căror parcurgere lămureşte, cel puţin parţial, şi situaţia funcţiilor scalare, ceea ce vine ca o completare a capitolului preliminar. Urmează apoi construcţia efectivă a calculului funcţional analitic în algebre Banach, cu varianta sa referitoare la operatorii liniari nemărginiţi, des întîlniţi în aplicaţii. Capitolul al doilea se ocupă de studiul descompunerii spectrale a operatorilor normali. O parte din rezultate sînt privite dintr-o perspectivă care le face aplicabile şi la situaţii mai generale. Al treilea capitol este dedicat studiului operatorilor autoadjuncţi nemărginiţi, clasă deosebit de importantă în special pentru fizica matematică. În afara studiului reprezentării integrale a acestor operatori, capitolul mai cuprinde rezultate privind extensia operatorilor simetrici şi elemente de teoria semigrupurilor tare continue de operatori. În capitolul al patrulea sînt prezentate cîteva clase remarcabile de operatori, între care operatorii compacţi şi operatorii Fredholm. Ultimul capitol este rezervat cîtorva din numeroasele aplicaţii ale teoriei operatorilor. Apar aici rezolvarea unor clase de ecuaţii integrale, studiul unor probleme la limită legate de anumiţi operatori diferenţiali, o prezentare a operatorilor de undă, precum şi cîteva aspecte ale formalismului mecanicii cuantice.

Cu excepţia ultimului, toate capitolele sînt prevăzute cu o secţiune finală de exerciţii şi completări, avînd rolul, pe de o parte, de a lărgi cadrul expunerilor şi, pe de alta, de a antrena cititorul într-o parcurgere activă a textului.

Lucrarea de faţă a fost scrisă pe baza cursului special de teoria operatorilor ţinut de autor mai mulţi ani la rînd pentru studenţii anului al patrulea al Facultăţii de matematică a Universităţii din Bucureşti. Autorul profită de ocazie să exprime recunoştinţa sa conducerilor Secţiei de matematică a INCREST şi Facultăţii de matematică a Universităţii din Bucureşti, care i-au oferit posibilitatea de a iniţia cîteva serii de studenţi în problematica de bază a teoriei operatorilor.

Colegilor săi Grigore Arsene, Radu Gologan și Dan Timotin autorul dorește să le exprime caldele sale mulțumiri pentru discuțiile utile legate de elaborarea prezentei lucrări.

În sfîrșit, dar nu în ultimul rînd, autorul ar dori să mulțumească foștilor săi studenți G. Nagy, A. Nica, V. Nistor și F. Rădulescu, a căror participare activă la lecțiile autorului a condus adesea la îmbunătățiri ale conținutului lor, reflectate și în actualul text.

Lucrarea se adresează tuturor persoanelor care doresc să abordeze teoria operatorilor liniari, precum și celor care urmăresc aplicarea acestei teorii în fizica matematică și în alte domenii ale cunoașterii.

București, februarie, 1987 *Florian-Horia Vasilescu*

CUPRINS

LISTĂ DE NOTAŢII 6

0. PRELIMINARII 7

0.1. Spaţii topologice 7
0.2. Spaţii normate 11
0.3. Operatori liniari 15
0.4. Măsură şi integrare 19
0.5. Algebre Banach 24
0.6. Exerciţii şi completări 26

1. CALCUL FUNCŢIONAL ANALITIC 30

1.1. Integrarea funcţiilor vectoriale 30
1.2. Funcţii analitice vectoriale 37
1.3. Calcul funcţional analitic în algebre Banach 43
1.4. Proprietăţi ale calculului funcţional analitic 50
1.5. Teorema de existenţă a idempotenţilor 53
1.6. Calculul funcţional analitic al operatorilor nemărginiţi 57
1.7. Exerciţii şi completări 64

2. DESCOMPUNEREA SPECTRALĂ A OPERATORILOR NORMALI 71

2.1. C*-algebre 71
2.2. Măsuri spectrale şi integrare 75
2.3. Reprezentarea integrală a operatorilor normali 82
2.4. Unicitatea măsurii spectrale ataşate unui operator normal 87
2.5. Calcul funcţional cu funcţii continue 91
2.6. Exerciţii şi completări 99

3. DESCOMPUNEREA SPECTRALĂ A OPERATORILOR AUTOADJUNCŢI (NEMĂRGINIŢI) 103

3.1. Adjunctul unui operator nemărginit 103
3.2. Operatorii autoadjuncţi şi reprezentarea lor integrală 106
3.3. Calcul funcţional borelian nemărginit 113
3.4. Prelungirea operatorilor simetrici 117
3.5. Operatori simetrici semimărginiţi 121
3.6. Semigrupuri de operatori 125
3.7. Semigrupuri unitare 136
3.8. Comutarea operatorilor autoadjuncţi 141
3.9. Exerciţii şi completări 144

4. CLASE SPECIALE DE OPERATORI LINIARI 151

4.1. Operatori compacţi 151
4.2. Spectrul operatorilor compacţi 154
4.3. Clasele Schatten-von Neumann 157
4.4. Operatori cu imagine închisă 165
4.5. Operatori Fredholm 168
4.6. Exerciţii şi completări 176

5. APLICAŢII 183

5.1. Ecuaţii integrale 183
5.2. Operatori Sturm-Liouville 187
5.3. Operatori de undă 192
5.4. Aspecte ale formalismului mecanicii cuantice 195

Index alfabetic 201

Bibliografie 204

LISĂTq E NOTAŢII

$\mathring{A}$ (0.1.3); $\overline{A}$ (0.1.3); $A^{\perp}$ (0.2.8); $\mathcal{A}$ (0.5.8); $\mathscr{A}(H)$ (pag. 71);
$\mathscr{A}_a$(1.3.5); $[\mathscr{A}_a]$ (1.3.11); $\mathscr{A}_T$, $[\mathscr{A}_T]$ (1.6.4); $A(U, X)$ (1.2.3); $A_\infty(U, X)$ (1.2.11).
$B(\Omega)$ (0.4.11.2^0); $B(\Omega, X)$ (1.1.4); $B_\mathscr{C}(\Omega)$ (0.4.9); $B_\mathscr{C}(\Omega, X)$ (1.1.1); $B(x, r)$(0.1.9); B_N(pag. 82);
Bor (Ω) (0.4.4).
$\mathbf{C}$ — corpul numerelor complexe; $\mathbf{C}^n$(0.1.10.5^0); $\mathbf{C}_\infty$(0.1.8);
C (C) (pag. 91); $C(\Omega)$ (0.4.18); $C(\Omega, X)$ (1.1.15); $C_\mathscr{D}$, $C_\mathscr{D}(H)$ (4.3.3); $\mathscr{C}(X)$, $\mathscr{C}(X, Y)$ (pag. 16)
$D(T)$ (0.3.1); dim — dimensiune algebrică; ∂A(0.1.3).
$f(a)$ (1.3.8); $f(A)$ (rel. (3.3.1)); $f(N)$ (2.3.7); $f(T)$ (1.6.4); $F_m(\Omega, X)$ (1.7.2).
$G(T)$ (0.3.1); $\Gamma(B)$ (0.5.5); $\gamma(T)$ (4.4.4).
$H_\pm$(5.3.5); H_A(5.3.3); $H^2([a, b])$ (pag. 189); χ_S(0.4.9).
$\mathbf{i}$ — unitatea imaginară; Im — parte imaginară; ind (T) (4.5.1).
$\mathscr{K}(X)$ (4.1.6); $\mathscr{K}(X, Y)$ [relaţia (4.1.2)].
l^2 (0.6.10); $L^p(\Omega, \mu)$ (0.6.23); $\mathscr{L}(X)$, $\mathscr{L}(X, Y)$ (pag. 16);
ln — logaritm natural.
$M(\Omega)$ (0.4.5); $\mu_{x,y}$(2.2.11.1^0).
$N(T)$ (0.3.1); $\|\cdot\|$ (normă; 0.2.1).
$\langle \cdot, \cdot \rangle$ (produs scalar; 0.2.4).
$\mathbf{R}$ — corpul numerelor reale; $\mathbf{R}_+$ — partea nenegativă a lui $\mathbf{R}$;
$\mathbf{R}_\infty$(pag. 108); $\mathbf{R}^n$(0.1.10.5^0); $\mathscr{R}_a$(1.3.4.2^0); $r(a)$ (0.5.4);
Re — parte reală; $R(T)$ (0.3.1); $\rho_B(a)$ (1.3.1); $\rho(T, X)$(1.6.3.1^0).
$\mathscr{S}(\mathbf{R})$ (5.4.5); $s_k(T)$ (4.3.3); supp f (1.7.9); $\sigma_B(a)$ (0.5.4);
$\sigma(T, X)$ (1.6.1); $\sigma_\infty(T, X)$ (1.6.4).
T^n(0.3.1); T^{-1} (0.3.1); T^* (0.3.10, 3.1.1).
$v(\mu; S)$ (0.4.6); $V(x, A, \epsilon)$ (0.3.14).
X^*(0.3.7); $X_T(F)$ (2.5.12): $x \perp y$ (0.2.8).
$\mathbf{Z}$ — inelul numerelor întregi.

0. PRELIMINARII

În acest capitol vom face o trecere în revistă a principalelor concepte şi rezultate ce stau la baza expunerilor care vor urma. Ne vom limita la definiţii, notaţii, enunţuri, exemple şi observaţii simple; pentru demonstraţiile mai complicate vom face cuvenitele trimiteri la bibliografie.

0.1. SPAŢII TOPOLOGICE

Vom considera cunoscute conceptul de mulţime şi operaţiile elementare cu mulţimi. Precizăm că semnele grafice $\cup$, $\cap$, $\setminus$, $\subset$, $\in$, $\times$ desemnează respectiv *reuniune*, *intersecţie*, *diferenţă*, *incluziune*, *apartenenţă*, *produs cartezian*. *Mulţimea vidă* va fi notată cu simbolul $\emptyset$. Pentru alte detalii trimitem la tratatele [11], [12], [8].

0.1.1. DEFINIŢII. Fie Ω o mulţime şi fie $\mathcal{T}$ o familie de părţi ale lui Ω. Familia $\mathcal{T}$ se numeşte *topologie* dacă verifică următoarele condiţii:

1^0 $\emptyset \in \mathcal{T}$, $\Omega \in \mathcal{T}$;

2^0 reuniunea oricărei subfamilii de mulţimi din $\mathcal{T}$ aparţine lui $\mathcal{T}$;

3^0 intersecţia oricărei subfamilii finite din $\mathcal{T}$ aparţine lui $\mathcal{T}$.

Elementele familiei $\mathcal{T}$ se numesc *mulţimi deschise*. Complementara unei mulţimi deschise se numeşte *mulţime închisă*. Perechea $\{\Omega, \mathcal{T}\}$ (iar uneori numai mulţimea Ω pe care s-a precizat o topologie) se numeşte *spaţiu topologic*.

0.1.2. EXEMPLE. 1^0 Fie $\mathbf{R}$ corpul numerelor reale. Vom nota cu $\mathcal{T}_{\mathbf{R}}$ familia reuniunilor de intervale deschise, nu neapărat mărginite, de numere reale (detalii privind numerele reale pot fi găsite în [4] sau [12]). Familia $\mathcal{T}_{\mathbf{R}}$ formează o topologie, numită *topologia naturală* a dreptei reale.

2^0 Fie $\mathbf{C}$ corpul numerelor complexe. Vom nota cu $\mathcal{T}_{\mathbf{C}}$ familia acelor submulţimi $V \subset \mathbf{C}$ cu proprietatea că, oricare ar fi punctul $z \in V$, există un număr pozitiv r astfel încît discul de centru z şi de rază r să fie conţinut în V. Familia $\mathcal{T}_{\mathbf{C}}$ formează o topologie numită *topologia naturală* a planului complex. (Detalii privind corpul numerelor complexe pot fi găsite în [1] sau [4].)

3° Dacă $\{\Omega, \mathcal{T}\}$ este un spațiu topologic și dacă $S \subset \Omega$, atunci perechea $\{S, \mathcal{T}|S\}$ este un spațiu topologic, unde

$$\mathcal{T}|S = \{A \cap S : A \in \mathcal{T}\}.$$

Topologia $\mathcal{T}|S$ se numește *topologia indusă* de $\mathcal{T}$ pe S (sau *restricția topologiei* $\mathcal{T}$ la S). În particular, dacă privim pe $\mathbf{R}$ ca pe o submulțime a lui $\mathbf{C}$, atunci $\mathcal{T}_{\mathbf{R}}$ este topologia indusă de $\mathcal{T}_{\mathbf{C}}$ pe $\mathbf{R}$.

0.1.3. DEFINIȚII. Fie $\{\Omega, \mathcal{T}\}$ un spațiu topologic și fie $A \subset \Omega$. O submulțime $V \subset \Omega$ se numește *vecinătate a mulțimii* A dacă există $U \in \mathcal{T}$ astfel încît $A \subset U \subset V$. În particular, dacă $A = \{\omega\}$, mulțimea V se numește *vecinătate a punctului* ω.

Un punct $\omega \in A$ se numește *interior* în mulțimea A dacă A este o vecinătate a lui ω.

Mulțimea punctelor interioare ale mulțimii A se notează cu $\mathring{A}$ și se numește *interiorul* mulțimii A.

Un punct $\omega \in \Omega$ se numește *punct aderent* al mulțimii A dacă orice vecinătate V a lui ω are proprietatea că $V \cap A \neq \emptyset$. Mulțimea punctelor aderente ale mulțimii A se notează cu $\bar{A}$ și se numește *aderența* (sau *închiderea*) mulțimii A.

Intersecția între aderența $\bar{A}$ a unei mulțimi A și aderența complementarei sale $\overline{\Omega \setminus A}$ se numește *frontiera mulțimii* $\bar{A}$ și se notează cu ∂A.

Să facem următoarele observații simple:

1° O submulțime $U \subset \Omega$ este deschisă dacă și numai dacă $U = \mathring{U}$.

2° O submulțime $F \subset \Omega$ este închisă dacă și numai dacă $F = \bar{F}$.

0.1.4. DEFINIȚII. Fie $\{\Omega_1, \mathcal{T}_1\}$, $\{\Omega_2, \mathcal{T}_2\}$ spații topologice și să considerăm funcția $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ (detalii privind conceptul de funcție pot fi găsite în [11] sau [14]). Vom spune că f este o *funcție continuă* pe Ω_1 dacă pentru orice $V_2 \in \mathcal{T}_2$ preimaginea $V_1 = f^{-1}(V_2)$ aparține familiei $\mathcal{T}_1$.

Să presupunem că f este o funcție bijectivă. Dacă atît funcția f cît și inversa sa f^{-1} sînt continue pe Ω_1 și, respectiv, pe Ω_2, atunci f se numește *omeomorfism*. În acest caz spațiile topologice $\{\Omega_1, \mathcal{T}_1\}$ și $\{\Omega_2, \mathcal{T}_2\}$ se numesc *omeomorfe*.

Teoria funcțiilor reale de variabilă reală [4] și teoria funcțiilor complexe de variabilă complexă [1] ne furnizează numeroase exemple de funcții continue și de omeomorfisme.

0.1.5. DEFINIȚII. Fie $\{\Omega, \mathcal{T}\}$ un spațiu topologic. Vom spune că $\{\Omega, \mathcal{T}\}$ este un *spațiu topologic separat* (sau *Hausdorff*) dacă pentru orice pereche de puncte ω_1, ω_2 din Ω cu $\omega_1 \neq \omega_2$ există $V_1 \ni \omega_1$, $V_2 \ni \omega_2$ din $\mathcal{T}$ astfel încît $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

Un spațiu topologic separat $\{\Omega, \mathcal{T}\}$ se numește *spațiu compact* dacă pentru orice familie $\{U_j\}_{j \in J}$ din $\mathcal{T}$ cu proprietatea că $\Omega = \bigcup \{U_j : j \in J\}$ există o parte finită $I \subset J$ astfel încît $\Omega = \bigcup \{U_j : j \in I\}$. În limbaj familiar, un spațiu topologic separat se numește *compact* dacă din orice acoperire deschisă a sa (familia $\{U_j\}_{j \in J}$ de părți ale lui Ω se numește *acoperire* a lui Ω dacă $\Omega = \bigcup \{U_j : j \in J\}$; dacă $U_j \in \mathcal{T}$ pentru fiecare

$j \in J$, atunci acoperirea se numește *deschisă*) se poate extrage o subacoperire finită.

O parte K a unui spațiu topologic separat $\{\Omega, \mathscr{T}\}$ se numește *compactă* dacă spațiul topologic $\{K, \mathscr{T}|K\}$ este compact (unde $\mathscr{T}|K$ este definită ca în exemplul 0.1.2.3⁰).

O parte A a unui spațiu topologic separat $\{\Omega, \mathscr{T}\}$ se numește *relativ compactă* dacă aderența sa $\bar{A}$ este compactă.

Un spațiu topologic separat se numește *local compact* dacă fiecare punct al său are o vecinătate compactă.

0.1.6. OBSERVAȚII. 1⁰ Spațiile $\{\mathbf{R}, \mathscr{T}_{\mathbf{R}}\}$ și $\{\mathbf{C}, \mathscr{T}_{\mathbf{C}}\}$ sînt local compacte. Orice submulțime mărginită (deci conținută într-un interval mărginit sau, respectiv, într-un disc) din aceste spații este relativ compactă. Dacă mulțimea este și închisă, atunci ea este compactă.

2⁰ Dacă $\{\Omega_1, \mathscr{T}_1\}$, $\{\Omega_2, \mathscr{T}_2\}$ sînt spații topologice separate și dacă $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ este o aplicație continuă, atunci imaginea $f(K)$ a oricărei părți compacte $K \subset \Omega_1$ este o parte compactă în Ω_2. Dacă Ω_1 și Ω_2 sînt spații compacte și funcția f este continuă și bijectivă, atunci inversa sa f^{-1} este automat continuă, deci f este în acest caz un omeomorfism (exercițiul 0.6.3).

0.1.7. TEOREMĂ. *Fie $\{\Omega, \mathscr{T}\}$ un spațiu topologic local compact. Există atunci un spațiu topologic compact $\{\Omega_\infty, \mathscr{T}_\infty\}$ astfel încît $\{\Omega, \mathscr{T}\}$ să fie omeomorf cu un spațiu topologic $\{\Omega_0, \mathscr{T}_0\}$, unde $\Omega_0 \subset \Omega_\infty$, $\mathscr{T}_0 = \mathscr{T}_\infty|\Omega_0$ iar $\Omega_\infty \setminus \Omega_0$ conține numai un punct.*

În plus, perechea $\{\Omega_\infty, \mathscr{T}_\infty\}$ este unic determinată în afara unui omeomorfism.

Acest rezultat este cunoscut sub denumirea de *teorema de compactificare a lui Alexandrov*. Spațiul Ω_∞ este dat de $\Omega \cup \{\infty\}$, unde ∞ este un element ce nu aparține spațiului Ω (de pildă Ω însuși). Topologia $\mathscr{T}_\infty$ se obține din topologia lui $\mathscr{T}$, la care se adaugă familia $\mathscr{V}_\infty$ a „vecinătăților deschise ale punctului ∞", anume

$$\mathscr{V}_\infty = \{U \cup \{\infty\} : U \in \mathscr{T},\ \Omega \setminus U \text{ compactă}\}.$$

Detalii privind demonstrația acestei teoreme pot fi găsite în [4], cap. II, §7.

0.1.8. OBSERVAȚIE. Teorema 0.1.7 ne permite, în particular, să obținem ceea ce numim *compactificarea planului complex* $\mathbf{C}$. Anume, adăugînd planului complex „punctul de la ∞", obținem un spațiu topologic compact $\mathbf{C}_\infty$, a cărui topologie restricționată la $\mathbf{C}$ coincide cu cea naturală a lui $\mathbf{C}$. Vecinătățile deschise ale punctului ∞ sînt deci complementarele părților compacte din $\mathbf{C}$, reunite cu punctul ∞. Spațiul $\mathbf{C}_\infty$ este omeomorf cu o sferă prin așa-numita *proiecție stereografică* (a se vedea [1], cap. 1, § 4), ceea ce justifică denumirea de *sferă a lui Riemann* folosită uneori pentru desemnarea spațiului $\mathbf{C}_\infty$.

0.1.9. DEFINIȚII. Fie M o mulțime nevidă. Se numește *metrică* (sau *distanță*) pe M o funcție d definită pe produsul cartezian $M \times M$

cu valori în $\mathbf{R}_+$ (partea nenegativă a corpului real $\mathbf{R}$), avînd următoarele proprietăţi :

1^0 $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

2^0 $d(x, y) = d(y, x)$;

3^0 $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$,

oricare ar fi elementele x, y, z ale lui M.

Perechea $\{M, d\}$ (uneori numai mulţimea M pe care s-a precizat o metrică) va fi numită *spaţiu metric.*

O mulţime de forma $B(x, r) = \{y \in M : d(y, x) < r\}$, unde $x \in M$ este fixat iar r este un număr pozitiv dat, se numeşte *sferă* în M (de centru x şi de rază r). Familia $\mathcal{T}_d$ a tuturor părţilor $U \subset M$, cu proprietatea că pentru orice $x \in U$ există $r > 0$ astfel încît $B(x, r) \subset U$, formează o topologie pe M, numită *topologia metrică* a lui M (indusă de distanţa d).

Un şir $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset M$ este convergent către un element $x \in M$ (se scrie $x_k \to x$ cînd $k \to \infty$) dacă şirul numeric $d(x_k, x) \to 0$ cînd $k \to \infty$. Elementul x, care este unic determinat datorită proprietăţilor distanţei, se numeşte *limita* şirului $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Un şir $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset M$ se numeşte *fundamental* (sau *Cauchy*) dacă $d(x_k, x_m) \to 0$ cînd $k, m \to \infty$.

Spaţiul metric $\{M, d\}$ se numeşte *complet* dacă orice şir fundamental din M este convergent către un element al lui M.

O submulţime D a spaţiului metric M se numeşte *densă* în M dacă aderenţa sa coincide cu întreg spaţiul M. Este uşor de văzut că submulţimea D este densă în M dacă şi numai dacă orice element al lui M este limita unui şir de elemente din D.

Un spaţiu metric $\{M, d\}$ se numeşte *separabil* dacă există o submulţime numărabilă a sa care să fie densă în M.

0.1.10. OBSERVAŢII. 1^0 Dacă $\{M, d\}$ este un spaţiu metric şi dacă M_0 este o parte a lui M, atunci restricţia d_0 a lui d la $M_0 \times M_0$ defineşte o metrică pe M_0. În plus, topologia metrică indusă de d_0 pe M_0 coincide cu restricţia topologiei metrice a lui M la M_0.

2^0 Fie $\{M_1, d_1\}$, $\{M_2, d_2\}$ spaţii metrice. Pe produsul cartezian $M_1 \times M_2$ se poate introduce o metrică în mai multe moduri (echivalente din punct de vedere topologic). O modalitate este următoarea :

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = [d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2]^{1/2},$$

oricare ar fi perechile (x_1, x_2) şi (y_1, y_2) din $M_1 \times M_2$.

3^0 O construcţie asemănătoare se poate face pentru un număr finit arbitrar de spaţii metrice. Anume, dacă $\{M_1, d_1\}, \ldots, \{M_n, d_n\}$ sînt spaţii metrice şi dacă $M = M_1 \times \ldots \times M_n$, o metrică pe M este dată de relaţia

$$d((x_j)_{j=1}^n, (y_j)_{j=1}^n) = \left[\sum_{j=1}^n d_j(x_j, y_j)^2\right]^{1/2}, \quad (x_j)_{j=1}^n, (y_j)_{j=1}^n \in M.$$

4^0 Mulţimile $\mathbf{R}$ şi $\mathbf{C}$ sînt spaţii metrice, cu metrica indusă de modul :

$$d(a, b) = |a - b|$$

oricare ar fi a, b din $\mathbf{R}$ sau $\mathbf{C}$. Evident, topologiile induse de această metrică sînt aceleaşi cu topologiile naturale.

5^0 Cu procedeul de la 3^0 putem construi o metrică pe spaţiul euclidian n-dimensional $\mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \ldots \times \mathbf{R}$ (de n ori), sau pe varianta sa complexă $\mathbf{C}^n = \mathbf{C} \times \ldots \times \mathbf{C}$ (de n ori), utilizînd distanţa definită la punctul anterior.

0.1.11. DEFINIŢII. Fie $\{M_1, d_1\}$, $\{M_2, d_2\}$ spaţii metrice. O funcţie $\varphi : M_1 \to M_2$ cu proprietatea

$$d_2(\varphi(x), \varphi(y)) = d_1(x, y), \quad x, y \in M_1,$$

se numeşte *izometrie.*

Dacă funcţia φ este bijectivă şi izometrie, atunci şi inversa sa este o izometrie. În acest caz spaţiile $\{M_1, d_1\}$, $\{M_2, d_2\}$ se numesc *izometrice.*

0.1.12. OBSERVAŢII. 1^0 Fie $\{M_1, d_1\}$, $\{M_2, d_2\}$ spaţii metrice. O funcţie $f : M_1 \to M_2$ este continuă pe M_1 dacă şi numai dacă, oricare ar fi şirul $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset M_1$ cu $x_k \to x \in M_1$ cînd $k \to \infty$, avem $f(x_k) \to f(x)$. În particular, orice izometrie este o aplicaţie continuă (exerciţiul 0.6.4)

2^0 Aplicaţia $\varphi : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ dată de relaţia $\varphi(a, b) = a + ib$ $(a, b \in \mathbf{R}, i^2 = -1)$ este o izometrie. Deoarece φ este bijectivă, spaţiile $\mathbf{C}$ şi $\mathbf{R}^2$ sînt izometrice. Analog, spaţiile $\mathbf{C}^n$ şi $\mathbf{R}^{2n}$ sînt izometrice (cu distanţele definite ca în observaţia 0.1.10.5^0).

0.1.13. DEFINIŢIE. Fie $\{M, d\}$ un spaţiu metric. O submulţime $S \subset M$ se numeşte *total mărginită* dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există o parte finită $F_\varepsilon \subset M$ astfel încît $M \subset \bigcup \{B(x, \varepsilon) : x \in F_\varepsilon\}$.

0.1.14. TEOREMĂ. *Fie $\{M, d\}$ un spaţiu metric complet şi fie S o submulţime a lui M. Sînt echivalente următoarele afirmaţii :*

1^0 *mulţimea S este relativ compactă ;*

2^0 *mulţimea S este total mărginită ;*

3^0 *din orice şir $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset S$ se poate extrage un subşir $\{x_{k_m}\}_{m=1}^{\infty}$ care este convergent în M.*

Pentru demonstraţia acestui rezultat cititorul poate consulta [4], cap. II, § 11 sau [8], cap. I, § 6.

0.2. SPAŢII NORMATE

Pentru conceptul de spaţiu vectorial (sau spaţiu liniar) trimitem la tratatul [4]. Menţionăm că toate spaţiile vectoriale pe care le vom întîlni în această lucrare vor fi automat considerate peste corpul complex $\mathbf{C}$, dacă un alt corp nu este explicit menţionat.

0.2.1. DEFINIŢII. Fie E un spaţiu vectorial. O aplicaţie $\|\cdot\| : E \to \mathbf{R}$ se numeşte *normă* pe E dacă sînt îndeplinite următoarele condiţii :

1^0 $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0_E$;

2^0 $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$, $\alpha \in \mathbf{C}$, $x \in E$ (*omogenitatea pozitivă a normei*) ;

3^0 $\| x + y \| \leqslant \| x \| + \| y \|$, $x, y \in E$ (*subaditivitatea normei*), unde 0_E este *elementul nul* al spaţiului E (notat simplu cu 0 atunci cînd nici o confuzie nu este posibilă).

Perechea $\{E, \| \cdot \|\}$ (sau numai spaţiul E cînd norma a fost precizată) se numeşte *spaţiu normat*.

0.2.2. OBSERVAŢII. 1^0 Avem $\| x \| \geqslant 0$ oricare ar fi $x \in E$, deoarece, din definiţia normei, $0 = \| 0 \| = \| x - x \| \leqslant 2 \| x \|$.

2^0 Un spaţiu normat este spaţiu metric, cu distanţa dată de egalitatea $d(x, y) = \| x - y \|$, oricare ar fi $x, y \in E$. Din acest motiv putem vorbi de topologia unui spaţiu normat, care este o topologie metrică. Această topologie este compatibilă cu operaţiile liniare ale lui E, în sensul că operaţia de adunare

$$E \times E \ni (x, y) \to x + y \in E,$$

precum şi cea de înmulţire cu scalari

$$\mathbf{C} \times E \ni (\alpha, x) \to \alpha x \in E$$

sînt operaţii continue (normînd corespunzător pe $E \times E$ sau $\mathbf{C} \times E$, ca în observaţia care urmează), după cum se poate constata uşor (exerciţiul 0.6.5).

3^0 Dacă $\{X, \| \cdot \|_X\}$, $\{Y, \| \cdot \|_Y\}$ sînt spaţii normate, produsul cartezian $X \times Y$ (care are structură naturală de spaţiu liniar cu adunarea şi înmulţirea cu scalari pe componente) poate fi privit ca spaţiu normat prin definirea normei

$$\| (x, y) \|_{X \times Y} = (\| x \|_X^2 + \| y \|_Y^2)^{1/2}, \qquad x \in X, \qquad y \in Y,$$

definiţie compatibilă cu observaţia 0.1.10.2^0.

0.2.3. DEFINIŢIE. Un spaţiu normat complet (ca spaţiu metric) va fi numit *spaţiu Banach*.

Un spaţiu Banach este, aşadar, un spaţiu normat în care orice şir fundamental este convergent către un element al spaţiului. De aici rezultă, în particular, că produsul cartezian a două spaţii Banach este un spaţiu Banach (a se vedea observaţia 0.2.2.3^0).

0.2.4. DEFINIŢIE. Fie E un spaţiu vectorial. O aplicaţie $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbf{C}$ se numeşte *produs scalar* dacă îndeplineşte următoarele condiţii:

1^0 $\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y \rangle = \alpha_1 \langle x_1, y \rangle + \alpha_2 \langle x_2, y \rangle$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{C}$, $x_1, x_2, y \in E$;

2^0 $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$, $x, y \in E$ (bara desemnează conjugatul complex);

3^0 $\langle x, x \rangle \geqslant 0$, $x \in E$;

4^0 $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

0.2.5. OBSERVAŢIE. Dacă $\langle \cdot, \cdot \rangle$ este un produs scalar pe spaţiul vectorial E, atunci are loc *inegalitatea lui Schwarz*:

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leqslant \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle, \qquad x, y \in E.$$

De aici rezultă că relația $\| x\| = (\langle x, x\rangle)^{1/2}$ definește o normă pe spațiul E. Într-un asemenea caz, se spune că norma lui E provine dintr-un produs scalar (exercițiul 0.6.6).

0.2.6. DEFINIȚII. Un spațiu normat a cărui normă provine dintr-un produs scalar se numește *spațiu prehilbertian.*

Un spațiu prehilbertian complet se numește *spațiu Hilbert.* Evident, un spațiu Hilbert este, în particular, spațiu Banach.

0.2.7. EXEMPLE. 1° Spațiul euclidian complex $\mathbf{C}^n$ poate fi înzestrat cu produsul scalar

$$\langle(\alpha_j)_{j=1}^n, (\beta_j)_{j=1}^n\rangle = \sum_{j=1}^n \alpha_j\bar{\beta}_j, \quad (\alpha_j)_{j=1}^n, (\beta_j)_{j=1}^n \in \mathbf{C}^n.$$

Cu norma indusă de acest produs scalar, spațiul $\mathbf{C}^n$ devine un spațiu Hilbert.

2° Mai general, fie $H_1, \ldots, H_n$ spații Hilbert cu produsele scalare $\langle\cdot, \cdot\rangle_1, \ldots, \langle\cdot, \cdot\rangle_n$. Atunci produsul cartezian $H = H_1 \times \ldots \times H_n$ poate fi dotat cu produsul scalar

$$\langle(x_j)_{j=1}^n, (y_j)_{j=1}^n\rangle = \sum_{j=1}^n \langle x_j, y_j\rangle_j, \quad x_j, y_j \in H_j, \quad j = 1, \ldots, n,$$

care-l transformă într-un spațiu Hilbert. Din motive care se vor clarifica în cele ce urmează, mai notăm $H = H_1 \oplus \ldots \oplus H_n$ și numim spațiul H *suma directă (ortogonală) a spațiilor* $H_1, \ldots, H_n$. (Aceasta presupune identificarea spațiului H_j cu subspațiul lui H format din elementele cu toate componentele nule, cu excepția cel mult a celei de pe locul j.)

0.2.8. DEFINIȚII. Fie H un spațiu Hilbert. Două submulțimi A și B ale lui H se numesc *ortogonale* dacă $\langle x, y\rangle = 0$, oricare ar fi $x \in A$ și $y \in B$. Două elemente $x, y \in H$ se numesc *ortogonale* dacă mulțimile $\{x\}$ și $\{y\}$ sînt ortogonale. Acest lucru se desemnează prin simbolul $x \perp y$.

Dacă $A \subset H$ este o submulțime arbitrară, notăm

$$A^\perp = \{x \in H : x \perp y, \ (\forall)\, y \in A\}.$$

Mulțimea $A^\perp$ se numește *complementul ortogonal* al mulțimii A. Se vede ușor că $A^\perp$ este un subspațiu liniar și închis al lui H, deci un spațiu Hilbert.

0.2.9. TEOREMĂ. *Fie H_0 un subspațiu liniar închis al spațiului Hilbert H. Atunci orice element $x \in H$ se poate reprezenta în mod unic sub forma $x = x_0 + x_1$, unde $x_0 \in H_0$ și $x_1 \in H_0^\perp$.*

Aplicația $H \ni x \to x_0 \in H_0$ se numește *proiecția spațiului H* pe subspațiul H_0; elementul x_0 se numește *proiecția elementului x* pe subspațiul H_0.

Descompunerea spațiului H obținută ca în teorema de mai sus se notează $H = H_0 \oplus H_0^\perp$ și se numește *descompunerea spațiului* Hilbert H *în suma directă* a două *subspații ortogonale* (a se vedea și observația 0.2.7.2°).

Demonstrația teoremei 0.2.9 și alte detalii privind cele de mai sus pot fi găsite în [5], cap. VI.

0.2.10. DEFINIȚII. Fie H un spațiu Hilbert. O familie de vectori $\{e_j\}_{j\in J}$ din H cu proprietatea că $e_j \perp e_k$ dacă $j \neq k$ se numește *sistem ortogonal*. Dacă, în plus, $\|e_j\| = 1$ pentru fiecare $j \in J$, familia se numește *sistem ortonormal*.

Un sistem ortonormal maximal se numește *bază ortonormală* a spațiului Hilbert H.

Cu ajutorul *teoremei lui Zorn* ([5], pag. 8), putem deduce ușor că orice spațiu Hilbert are o bază ortonormală.

0.2.11. TEOREMĂ. *Fie* $\{e_j\}_{j\in J}$ *un sistem ortonormal în spațiul Hilbert* H. *Următoarele afirmații sînt echivalente*:

1° $\{e_j\}_{j\in J}$ *este bază ortonormală a lui* H;

2° *orice element* $x \in H$ *se poate reprezenta sub forma*

$$x = \sum_{j\in J} \alpha_j e_j, \quad \alpha_j \in \mathbf{C}, \qquad j \in J;$$

3° *pentru orice* $x \in H$ *are loc egalitatea*

$$\|x\|^2 = \sum_{j\in J} |\langle x, e_j\rangle|^2.$$

Pentru demonstrație se poate consulta [5], cap. VI. Menționăm că sumele de la 2° și 3° sînt considerate în sensul teoriei familiilor sumabile (a se vedea [5], cap. III, § 2.3).

0.2.12. OBSERVAȚIE. În cazul în care spațiul Hilbert este separabil (a se vedea definițiile 0.1.9), orice bază ortonormală a sa este cel mult numărabilă. În această situație, sumele din teorema 0.2.11 sînt sume obișnuite sau serii. Tot în acest caz, din orice sistem liniar independent de vectori din H care generează un subspațiu dens în H se poate obține o bază ortonormală, utilizîndu-se un procedeu constructiv numit *Gram-Schmidt* (a se vedea [5], cap. VI sau exercițiul 0.6.9).

0.2.13. TEOREMĂ. *Într-un spațiu Hilbert oricare două baze ortonormale au același cardinal.*

Acest rezultat ne permite să vorbim despre *dimensiunea* unui spațiu Hilbert, ca fiind cardinalul bazelor sale ortonormale. Pentru detalii, recomandăm [5], cap. VI, § 2.

0.2.14. TEOREMĂ. *Fie* X *un spațiu liniar, normat. Există atunci un spațiu Banach* $\widetilde{X}$ *astfel încît* X *să fie izomorf cu un subspațiu liniar dens în* $\widetilde{X}$, *izomorfismul fiind și izometrie.*

Dacă X *este un spațiu prehilbertian, atunci* $\widetilde{X}$ *este un spațiu Hilbert.*

Spațiul $\widetilde{X}$ este numit *completatul* spațiului X.

Prima parte a acestei teoreme se poate găsi în [5], cap. III, § 2.2. Partea a doua a teoremei se poate obține ușor din prima parte, dacă se ține seama de rezultatul care urmează:

0.2.15. TEOREMĂ. *Un spațiu normat X este un spațiu prehilbertian dacă și numai dacă norma sa satisface condiția*

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2), \quad x,y\in X.$$

Un calcul simplu ne arată că orice normă provenind dintr-un produs scalar satisface relația din enunțul teoremei 0.2.15. Reciproc, dîndu-se o normă care satisface relația din enunțul teoremei 0.2.15, putem defini un produs scalar prin egalitatea

$$\langle x,y\rangle=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+\mathrm{i}\|x+\mathrm{i}y\|^2-\mathrm{i}\|x-\mathrm{i}y\|^2), \quad x,y\in X.$$

Pentru detalii trimitem la [5], cap. VI, § 1.2.

0.3. OPERATORI LINIARI

Conceptul de aplicație liniară are semnificația din algebra liniară (a se vedea de exemplu [4], cap. III, § 2).

0.3.1. DEFINIȚII. Fie X, Y două spații Banach și fie $D\subset X$ un subspațiu liniar, nu neapărat închis. Numim *operator liniar* (sau, simplu, *operator*) pe spațiul D cu valori în Y orice aplicație liniară $T:D\to Y$. Spațiul D se mai notează $D(T)$ și se numește *domeniul de definiție* al operatorului T. Spațiul liniar

$$R(T)=\{y=Tx\in Y : x\in D(T)\}$$

se numește *imaginea* (sau *domeniul valorilor*) lui T. Spațiul liniar

$$N(T)=\{x\in D(T) : Tx=0\}$$

se numește *nucleul* lui T. Mulțimea

$$G(T)=\{(x,Tx) : x\in D(T)\}$$

se numește *graficul* lui T. Graficul lui T este un subspațiu liniar al produsului cartezian $X\times Y$.

Fie $T_1:D(T_1)\subset X\to Y$ și $T_2:D(T_2)\subset X\to Y$ operatori liniari. Dacă $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbf{C}$, operatorul $T=\alpha_1T_1+\alpha_2T_2$ are domeniul de definiție $D(T)=D(T_1)\cap D(T_2)$ și se definește prin relația $Tx=\alpha_1T_1x+\alpha_2T_2x$ pentru orice $x\in D(T)$.

Fie $T_1:D(T_1)\subset X\to Y$ și $T_2:D(T_2)\subset Y\to Z$ operatori liniari, unde Z este un alt spațiu Banach. Operatorul $T=T_2T_1$ are domeniul de definiție $D(T)=\{x\in D(T_1) : T_1x\in D(T_2)\}$ și se definește prin relația $Tx=T_2T_1x$ dacă $x\in D(T)$. Definiția se poate extinde la un număr finit de operatori $T_1,\ldots,T_n$. În particular, fiind dat un operator $T:D(T)\subset X\to X$,

putem defini *puterile* (sau *iteratele*) sale prin egalităţile $T^2 = TT$, $T^3 = TTT$ etc. Avem aşadar

$$D(T^n) = \{x \in D(T^{n-1}) : T^{n-1}x \in D(T)\}$$

şi $T^n x = TT^{n-1}x$ pentru $x \in D(T^n)$ $(n \geqslant 2)$.

Dacă $T : D(T) \subset X \to X$, prin T^0 vom înţelege întotdeauna operatorul identic al lui X în X.

Fie $T : D(T) \subset X \to Y$ un operator liniar cu proprietatea $N(T) = \{0\}$ (cu alte cuvinte, aplicaţia liniară T este injectivă). Putem defini atunci *inversul* său $T^{-1} : D(T^{-1}) \subset Y \to X$ prin relaţia $T^{-1}y = x$, unde $Tx = y$. Deci $D(T^{-1}) = R(T)$.

0.3.2. DEFINIŢII. Fie $T : D(T) \subset X \to Y$ un operator liniar. Operatorul T se numeşte *preînchis* dacă închiderea $\overline{G(T)}$ a graficului său $G(T)$ este încă un grafic. Cu alte cuvinte, dacă $(x, y) \in \overline{G(T)}$ şi $x = 0$, atunci $y = 0$. Operatorul $\bar{T}$ dat de relaţia $\bar{T}x = y$ dacă $(x, y) \in \overline{G(T)}$ este o extensie a lui T (operatorul $T_2 : D(T_2) \subset X \to Y$ este o *extensie* a operatorului $T_1 : D(T_1) \subset X \to Y$ dacă $G(T_2) \supset G(T_1)$; altfel spus, $D(T_2) \supset D(T_1)$ şi $T_2x = T_1x$, oricare ar fi $x \in D(T_1)$) şi se numeşte *închiderea canonică* a lui T. Dacă $\overline{G(T)} = G(T)$, operatorul T se numeşte *închis*. Este clar că operatorul T este închis dacă şi numai dacă pentru orice şir $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset D(T)$, cu proprietăţile $x_k \to x$ şi $Tx_k \to y$ $(k \to \infty)$, deducem că $x \in D(T)$ şi $Tx = y$. Un rezultat important legat de conceptul de operator închis este aşa-numita *teoremă a graficului închis* datorată lui Banach :

0.3.3. TEOREMĂ. *Fie $T : D(T) \subset X \to Y$ un operator închis. Dacă $D(T) = X$, atunci T este o aplicaţie continuă.*

Detalii privind demonstraţia acestui rezultat pot fi găsite în [5], cap. IV, § 1.

Dacă X, Y sînt spaţii Banach, vom nota cu $\mathscr{C}(X, Y)$ mulţimea operatorilor închişi, definiţi pe subspaţii liniare ale lui X, cu valori în Y*). Submulţimea operatorilor $T \in \mathscr{C}(X, Y)$ cu proprietatea că $D(T) = X$ va fi notată cu $\mathscr{L}(X, Y)$. Dacă $X = Y$, vom scrie $\mathscr{C}(X)$ şi $\mathscr{L}(X)$ în loc de $\mathscr{C}(X, Y)$, respectiv $\mathscr{L}(X, Y)$. Teorema graficului închis ne asigură că toţi operatorii din $(\mathscr{L}X, Y)$ sînt aplicaţii continue. Reciproc, un operator liniar $T : X \to Y$ care este continuu este operator închis. Aşadar, $\mathscr{L}(X, Y)$ coincide cu mulţimea tuturor operatorilor liniari şi continui de la X în Y. Dotată cu operaţiile naturale de adunare şi de înmulţire cu scalari (cazuri particulare ale operaţiilor definite la 0.3.1), familia $\mathscr{L}(X, Y)$ se organizează ca spaţiu liniar.

0.3.4. TEOREMĂ. *Fie $T : X \to Y$ o aplicaţie liniară. Următoarele condiţii sînt echivalente :*

1^0 *aplicaţia T este continuă ;*

2^0 *cantitatea $\| T\| = \sup \{\|Tx\|_Y : \|x\|_X \leqslant 1\}$ este finită.*

În plus, aplicaţia $T \to \| T\|$ defineşte o normă pe saţiul $\mathscr{L}(X, Y)$, în raport cu care $\mathscr{L}(X, Y)$ devine spaţiu Banach.

*) Simbolul $\mathscr{C}$ vine de la cuvîntul englezesc *closed* (închis) ; nu are nici o legătură cu continuitatea.

(Aici $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$ sînt normele lui X şi Y, respectiv.)

Pentru detalii recomandăm [5], cap. IV, § 1.2. Norma spaţiului $\mathscr{L}(X, Y)$ dată de teorema 0.3.4 poate fi caracterizată în mai multe moduri (exerciţiul 0.6.13) :

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_X=1} \|Tx\|_Y = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} =$$

$$= \inf\{M \geqslant 0 : \|Tx\|_Y \leqslant M\|x\|_X,\ (\forall)\ x \in X\}.$$

Un alt rezultat fundamental în teoria operatorilor liniari este *principiul mărginirii uniforme* datorat lui Banach şi Steinhaus :

0.3.5. TEOREMĂ. *Fie* $\{T_j\}_{j\in J}$ *o familie în* $\mathscr{L}(X, Y)$ *cu proprietatea că* $\sup\|\{T_jx\|_Y : j \in J\} < \infty$ *pentru fiecare* $x \in X$. *Rezultă atunci că* $\sup\{\|T_j\| : j \in J\} < \infty$.

Demonstraţia acestui rezultat poate fi găsită în [5], cap. IV, §1.3.

0.3.6. OBSERVAŢII. 1° Reamintim că într-un spaţiu normat $\{X, \|\cdot\|_X\}$ o mulţime $A \subset X$ se numeşte *mărginită* dacă $\sup\{\|x\|_X : x \in A\} < \infty$. Principiul mărginirii uniforme obţine mărginirea familiei $\{T_j : j \in J\}$ în $\mathscr{L}(X, Y)$ din mărginirea familiilor $\{T_jx : j \in J\}$ în Y pentru fiecare $x \in X$, ultima condiţie fiind mult mai uşor de verificat.

2° În teorema 0.3.4 putem adăuga următoarea condiţie, echivalentă cu celelalte două (exerciţiul 0.6.14) :

(m) *aplicaţia* T *duce mulţimile mărginite din* X *în mulţimi mărginite în* Y.

Condiţia (m) poate fi utilizată la definirea conceptului de *aplicaţie mărginită* de la spaţiul X în spaţiul Y. Cu remarca de mai sus, o aplicaţie liniară este continuă dacă şi numai dacă este mărginită. Acesta este motivul pentru care se foloseşte uneori denumirea de *operator mărginit* în locul aceleia de operator continuu. Mai mult, pentru un operator liniar care nu este continuu se va utiliza denumirea de *operator nemărginit*.

0.3.7. DEFINIŢIE. Fie X un spaţiu Banach. Atunci spaţiul $\mathscr{L}(X, \mathbf{C})$ se notează X^* şi se numeşte *dualul* lui X. Elementele lui X^* se numesc *funcţionale liniare şi continue* pe X.

Existenţa funcţionalelor liniare şi continue se obţine din următorul rezultat de extensie, datorat lui Hahn şi Banach :

0.3.8. TEOREMĂ. *Fie* X *un spaţiu Banach şi fie* $Y \subset X$ *un subspaţiu liniar închis al său. Atunci oricare ar fi* $f \in Y^*$, *există* $F \in X^*$ *astfel încît* $F|Y = f$ *şi* $\|F\| = \|f\|$.

Pentru demonstraţie recomandăm [5], cap. I, § 2.5 sau [8], cap. II, § 3.

0.3.9. OBSERVAŢIE. Fie X un spaţiu Banach, fie $Y \subset X$ un subspaţiu liniar închis şi fie $x_0 \in X \setminus Y$. Din teorema 0.3.9 se obţine existenţa unei funcţionale liniare şi continue f pe X astfel încît $f(x_0) = 1$ şi $\|f\| =$

$= (\inf\{\| x_0 - y \|_X : y \in Y\})^{-1}$; evident, norma lui f se calculează prin teorema 0.3.4 (a se vedea [8], cap. II).

0.3.10. DEFINIȚIE. Fie X, Y spații Banach și fie $T \in \mathscr{L}(X, Y)$. Definim un operator $T^* : Y^* \to X^*$ prin formula $T^* g(x) = g(Tx)$ pentru orice $g \in Y^*$ și $x \in X$. Liniaritatea lui T^* este evidentă. Utilizînd observația 0.3.9 (cazul $Y = \{0\}$), deducem ușor că $\| T^* \| = \| T \|$; în particular, $T^* \in \mathscr{L}(Y^*, X^*)$. Operatorul T^* se numește *adjunctul* lui T.

În cazul spațiilor Hilbert este convenabil să definim adjunctul unui operator într-o manieră ușor diferită. Motivul principal îl constituie următoarea *teoremă de reprezentare* datorată lui Riesz :

0.3.11. TEOREMĂ. *Fie H un spațiu Hilbert. Atunci pentru orice $f \in H^*$ există un element unic determinat $y_f \in H$ astfel încît $f(x) = \langle x, y_f \rangle_H$ pentru toți $x \in H$ și $\|f\| = \|y_f\|_H$.*

Demonstrația poate fi găsită în [5], cap. VI, § 3.1.

Aplicația $f \to y_f$ a lui H^* în H este aditivă și antiomogenă în sensul că $y_{\alpha f} = \bar{\alpha} y_f$ pentru toți $\alpha \in \mathbf{C}$ și $f \in H^*$. Fiind și bijectivă, această aplicație permite identificarea naturală a spațiului H^* cu spațiul H.

0.3.12. DEFINIȚII. Fie H, K spații Hilbert cu produsele scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_K$ și fie $T \in \mathscr{L}(H, K)$. Atunci *adjunctul* lui T (în sensul spațiilor Hilbert) este operatorul dat de relația

$$\langle T^* y, x \rangle_H = \langle y, Tx \rangle_K, \qquad x \in H, y \in K.$$

Aplicația $T^* : K \to H$ este liniară și satisface relația $\| T^* \| = \| T \|$.

Dacă $T^* = T^{-1}$, operatorul T se numește *unitar*. În acest caz

$$\| Tx \|_K^2 = \langle Tx, Tx \rangle_K = \langle T^* Tx, x \rangle_H = \langle x, x \rangle_H = \| x \|_H^2$$

oricare ar fi $x \in H$, deci T este izometrie.

Dacă $H = K$ și operatorul T satisface relația $TT^* = T^* T$, atunci T se numește *operator normal*.

Dacă $H = K$ și operatorul T are proprietatea $T = T^*$, atunci operatorul T se numește *autoadjunct*. Evident, un operator autoadjunct este normal.

0.3.13. OBSERVAȚIE. Dacă X este un spațiu Banach, $\mathscr{L}(X)$ se poate organiza ca algebră asociativă, cu produsul definit prin compunerea aplicațiilor. În acest caz, operația de trecere la adjunct aplică algebra $\mathscr{L}(X)$ în algebra $\mathscr{L}(X^*)$. Dacă $X = H$ este un spațiu Hilbert, trecerea la adjunct ne lasă în cadrul algebrei $\mathscr{L}(H)$. Această operație are următoarele proprietăți (exercițiul 0.6.15) :

(i) $(T^*)^* = T$, (iii) $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$,

(ii) $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$, (iv) $(T_1 T_2)^* = T_2^* T_1^*$,

oricare ar fi $T, T_1, T_2 \in \mathscr{L}(H)$ și $\alpha \in \mathbf{C}$. Acest fapt ne îndreptățește să spunem că operația $T \to T^*$ este o *involuție* pe $\mathscr{L}(H)$ [6].

0.3.14. DEFINIȚII. Fie E un spațiu liniar și fie E^+ spațiul tuturor aplicațiilor liniare și continue, definite pe E, cu valori scalare. Un subspațiu liniar $\Gamma \subset E^+$ se numește *total* dacă din faptul că $f(x) = 0$ pentru orice $f \in \Gamma$ rezultă $x = 0$.

Fie $\Gamma \subset E^+$ un subspațiu total. Vom considera mulțimile de forma

$$V(x; A, \varepsilon) = \{y \in E : |f(y) - f(x)| < \varepsilon, f \in A\},$$

unde $A \subset \Gamma$ este o parte finită arbitrară și $\varepsilon > 0$. Reuniunile de mulțimi de acest tip (cînd x, A și ε variază) formează o *topologie separată* pe E numită $\sigma(E, \Gamma)$ *-topologia* lui E (exercițiul 0.6.19).

Pentru fiecare $x \in E$ fixat, familia $\{V(x; A, \varepsilon)\}_{A,\varepsilon}$ este ceea ce numim un *sistem fundamental de vecinătăți* ale lui x.

În particular, dacă X este un spațiu Banach, atunci putem vorbi despre $\sigma(X, X^*)$-topologia sa. Deoarece elementele lui X pot fi privite ca funcționale liniare și continue pe X^* (prin aplicația $x \to F_x$, unde $F_x(f) = f(x)$ pentru orice $x \in X$ și $f \in X^*$), putem de asemenea vorbi și de $\sigma(X^*, X)$-topologia lui X^*. Acestea sînt așa-numitele *topologii slabe* pe spații Banach, în general diferite de topologiile induse de normele lor. Pentru detalii recomandăm [5], cap. II și [8], cap. V.

0.4. MĂSURĂ ȘI INTEGRARE

Există numeroase texte consacrate teoriei măsurii și integrării funcțiilor scalare, între care ne-am oprit în special la [8], [10] și [12]. Fără a ne situa în condițiile cele mai generale, vom prezenta în acest paragraf cîteva fapte din teoria măsurii și a integrării, adaptînd necesităților noastre unele rezultate fundamentale, în spiritul tratatului [8], cap. III.

0.4.1. DEFINIȚIE. Fie Ω o mulțime arbitrară. O familie Σ de părți ale lui Ω se numește *σ-algebră* dacă îndeplinește următoarele condiții:

1^0 $\emptyset \in \Sigma$;

2^0 $S \in \Sigma \Rightarrow \Omega \setminus S \in \Sigma$;

3^0 $\{S_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \Sigma \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k \in \Sigma$.

0.4.2. EXEMPLE. 1^0 Familia tuturor părților mulțimii Ω formează o σ-algebră.

2^0 Fie $\{\Sigma_j\}_{j \in J}$ o colecție arbitrară de σ-algebre. Atunci $\Sigma = \bigcap \{\Sigma_j : j \in J\}$ este o σ-algebră.

0.4.3. DEFINIȚIE. Fie Ω o mulțime arbitrară și fie Σ o σ-algebră de părți ale lui Ω. O aplicație $\mu : \Sigma \to \mathbf{C}$ se numește *măsură* (sau *funcție numărabil aditivă de mulțime*) dacă îndeplinește următoarele condiții:

1^0 $\mu(\emptyset) = 0$;

2^0 dacă $\{S_k\}_{k=1}^{\infty}$ este un şir din Σ astfel încît $S_k \cap S_m = \emptyset$ pentru $k \neq m$, atunci

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(S_k).$$

0.4.4. DEFINIŢIE. Fie Ω un spaţiu topologic. Cea mai mică σ-algebră de părţi ale lui Ω care conţine toate submulţimile închise (şi deci şi pe cele deschise) ale lui Ω se numeşte *σ-algebra boreliană* a lui Ω. Această σ-algebră, care există în conformitate cu exemplele 0.4.2, va fi notată cu $\mathrm{Bor}(\Omega)$. Elementele familiei $\mathrm{Bor}(\Omega)$ se vor numi *mulţimi boreliene.*

0.4.5. DEFINIŢII. Fie Ω un spaţiu topologic. O măsură $\mu : \mathrm{Bor}(\Omega) \to \mathbf{C}$ se numeşte *regulată* dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ şi $S \in \mathrm{Bor}(\Omega)$ există mulţimile $F \subset \Omega$ închisă şi $G \subset \Omega$ deschisă astfel încît $F \subset S \subset G$ şi pentru orice $S' \in \mathrm{Bor}(\Omega)$ cu $F \subset S' \subset G$ să avem $|\mu(S) - \mu(S')| < \varepsilon$.

Numim *măsură Radon* (sau simplu *măsură*, atunci cînd nici o confuzie nu este posibilă) orice funcţie numărabil aditivă şi regulată pe $\mathrm{Bor}(\Omega)$. De asemenea, în exprimarea curentă vom spune „măsură pe Ω" în loc de „măsură pe $\mathrm{Bor}(\Omega)$".

O măsură μ pe Ω se numeşte *pozitivă* dacă $\mu(S) \geqslant 0$ pentru orice $S \in \mathrm{Bor}(\Omega)$. Notăm acest lucru prin relaţia $\mu \geqslant 0$.

Mulţimea măsurilor (Radon) pe Ω va fi desemnată prin simbolul $M(\Omega)$. Este uşor de văzut că $M(\Omega)$ este un spaţiu liniar.

0.4.6. DEFINIŢIE. Fie $\mu \in M(\Omega)$. *Variaţia totală* a măsurii μ pe mulţimea $S \in \mathrm{Bor}(\Omega)$ este dată de relaţia

$$v(\mu; S) = \sup\{\sum_{j \in J} |\mu(S_j)| : \{S_j\}_{j \in J} \subset \mathrm{Bor}(\Omega), \quad J \text{ finită},$$

$$S_j \cap S_k = \emptyset \ (j \neq k), \ \bigcup_{j \in J} S_j = S\}.$$

Dacă $\mu \geqslant 0$, atunci $v(\mu; S) = \mu(S)$ pentru orice $S \in \mathrm{Bor}(\Omega)$.

0.4.7. TEOREMĂ. 1^0 *Pentru orice* $\mu \in M(\Omega)$ *aplicaţia*

$$\mathrm{Bor}(\Omega) \ni S \to v(\mu; S) \in \mathbf{R}_+$$

este o măsură (pozitivă) pe Ω, *satisfăcînd estimările*

$$\sup_{\substack{S' \subset S \\ S' \in \mathrm{Bor}(\Omega)}} |\mu(S')| \leqslant v(\mu; S) \leqslant 4 \sup_{\substack{S' \subset S \\ S' \in \mathrm{Bor}(\Omega)}} |\mu(S')|.$$

2^0 *Aplicaţia*

$$\|\mu\| = v(\mu; \Omega), \ \mu \in M(\Omega),$$

este o normă pe $M(\Omega)$, *în raport cu care spaţiul* $M(\Omega)$ *devine un spaţiu Banach.*

Detalii privind demonstraţia acestor afirmaţii pot fi găsite în [8] cap. III.

0.4.8. DEFINIȚIE. Fie Ω un spațiu topologic. O funcție $f : \Omega \to \mathbf{C}$ se numește *boreliană* (pe Ω) dacă pentru orice $A \in \mathrm{Bor}(\mathbf{C})$ avem $f^{-1}(A) \in \in \mathrm{Bor}(\Omega)$.

0.4.9. EXEMPLU. Pentru fiecare submulțime S a lui Ω vom nota cu χ_S *funcția* sa *caracteristică*.

O aplicație de forma

$$f(\omega) = \sum_{j \in J} \alpha_j \chi_{S_j}(\omega), \quad \omega \in \Omega,$$

unde J este o familie finită de indici, $\{S_j\}_{j \in J} \subset \mathrm{Bor}(\Omega)$, $\bigcup_{j \in J} S_j = \Omega$, $S_j \cap S_k = \emptyset$ $(j \neq k)$ și $\alpha_j \in \mathbf{C} (j \in J)$ se numește *funcție simplă* (sau *etajată*). În această reprezentare valorile α_j nu sînt presupuse distincte, și deci scrierea nu este neapărat unică. Dacă cerem ca valorile α_j să fie distincte, atunci mulțimile S_j sînt bine determinate și scrierea de mai sus este unică, în afara ordinei.

Este ușor de văzut că orice funcție simplă este boreliană. Se poate verifica de asemenea cu ușurință că suma și produsul a două funcții simple este o funcție simplă (exercițiul 0.6.20). Așadar, mulțimea funcțiilor simple pe Ω, notată $B_e(\Omega)$, formează o algebră [2], [5]. Vom dota spațiul liniar $B_e(\Omega)$ cu norma

$$\|f\| = \sup_{\omega \in \Omega} |f(\omega)|, \quad f \in B_e(\Omega)$$

(de fapt, supremumul este în acest caz atins), urmînd ca structura multiplicativă să fie discutată mai tîrziu.

0.4.10. TEOREMĂ. 1° *O funcție scalară f pe Ω este boreliană dacă și numai dacă f este limita punctuală a unui șir de funcții simple pe Ω.*

2° *Orice funcție boreliană și mărginită pe Ω este limita uniformă a unui șir de funcții simple pe Ω.*

3° *Orice funcție continuă și mărginită pe Ω este boreliană.*

Detalii privind aceste rezultate pot fi găsite în [12], cap. XII. De fapt, asupra punctelor 2° și 3° din teorema 0.4.10 vom reveni în paragraful consacrat integrării funcțiilor vectoriale din capitolul următor.

0.4.11. OBSERVAȚII. 1° Din teorema 0.4.10 rezultă ușor că mulțimea funcțiilor boreliene formează o algebră.

2° Dacă notăm cu $B(\Omega)$ mulțimea funcțiilor boreliene mărginite pe Ω, rezultă, în virtutea teoremei 0.4.10, că $B(\Omega)$ este completatul spațiului normat $B_e(\Omega)$ în sensul teoremei 0.2.14. Așadar, $B(\Omega)$ este un spațiu Banach, cu norma definită ca în exemplul 0.4.9.

0.4.12. DEFINIȚIE. Fie $\mu \in M(\Omega)$ și fie $f \in B_e(\Omega)$ reprezentată ca în exemplul 0.4.9. Vom defini *integrala* funcției f în raport cu măsura μ prin relația

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{j \in J} \alpha_j \mu(S_j).$$

Se poate constata uşor că această definiţie nu depinde de reprezentarea funcţiei f (exerciţiul 0.6.21). Integrala se mai notează şi în alte moduri, între care şi $\int f(\omega)\, d\mu(\omega)$.

Dacă $S \in \mathrm{Bor}(\Omega)$, definim integrala funcţiei f pe mulţimea S prin relaţia

$$\int_S f\, d\mu = \int \chi_S f\, d\mu = \sum_{j \in J} \alpha_j \mu(S_j \cap S),$$

notată uneori şi $\int_S f(\omega)\, d\mu(\omega)$.

0.4.13. DEFINIŢIE. Fie $\mu \in M(\Omega)$. Un şir de funcţii boreliene $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ pe Ω *converge în măsura* μ către funcţia borelianã f dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ avem

$$\lim_{n \to \infty} v(\mu; \{\omega : |f_n(\omega) - f(\omega)| \geqslant \varepsilon\}) = 0.$$

Să extindem integrala de la 0.4.12 la o clasă mult mai largă de funcţii.

0.4.14. DEFINIŢIE. Fie $\mu \in M(\Omega)$ şi fie f o funcţie borelianã pe Ω. Vom spune că f este *integrabilă* în raport cu măsura μ dacă există un şir $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B_e(\Omega)$ care converge în măsura μ către funcţia f, avînd în plus proprietatea

$$\lim_{n,m \to \infty} \int |f_n(\omega) - f_m(\omega)|\, v(\mu; d\omega) = 0$$

(în care $v(\mu; d\omega)$ desemnează integrarea în raport cu măsura $S \to v(\mu; S)$). În aceste condiţii are sens să definim *integrala* funcţiei f în raport cu μ prin formula

$$\int f\, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n\, d\mu,$$

în care limita există şi nu depinde de şirul $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ cu proprietăţile menţionate mai sus. În plus, integrala depinde liniar de f şi poate fi definită pe orice submulţime $S \in \mathrm{Bor}(\Omega)$ (pentru detalii trimitem la [8], cap. III, § 2).

0.4.15. OBSERVAŢIE. Funcţiile din $B(\Omega)$ sînt integrabile în raport cu orice măsură $\mu \in M(\Omega)$. Într-adevăr, dacă $f \in B_e(\Omega)$, atunci au loc estimările

$$\left| \int f(\omega)\, d\mu(\omega) \right| \leqslant \int |f(\omega)|\, v(\mu; d\omega) \leqslant \|f\|\, v(\mu; \Omega).$$

(a se vedea [8], cap. III, § 2). Dacă $f \in B(\Omega)$, atunci f este limita uniformă a unui şir $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B_e(\Omega)$, pe baza teoremei 0.4.10. În particular, funcţiile f_n converg în măsura μ către f şi îndeplinesc şi condiţia de convergenţă din definiţia 0.4.14, în virtutea estimărilor de mai înainte. Existenţa integralei funcţiei f este şi ea o consecinţă a acestor estimări.

Rezultatul care urmează este cunoscut sub numele de *lema lui Fatou.*

0.4.16. TEOREMĂ. *Fie* $\mu \in M(\Omega)$ *o măsură pozitivă şi fie* $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *un şir de funcţii boreliene pozitive pe* Ω, *integrabile în raport cu* μ. *Dacă*

$$\varlimsup_{k\to\infty} \int f_k \, d\mu < \infty$$

atunci funcţia $\varlimsup_{k\to\infty} f_k$ *este integrabilă în raport cu* μ *şi are loc estimarea*

$$\int \varlimsup_{k\to\infty} f_k \, d\mu \leqslant \varlimsup_{k\to\infty} \int f_k \, d\mu.$$

Demonstraţia poate fi găsită în [8], cap. III, § 6.

Dacă $\mu \in M(\Omega)$ este o măsură pozitivă şi dacă o proprietate care depinde de punctele lui Ω are loc cu excepţia unei mulţimi de puncte de măsură nulă, se spune că proprietatea are loc μ-*aproape peste tot.* În particular, şi acesta este cazul chiar în teorema 0.4.16, putem integra funcţii definite doar μ-aproape peste tot.

Rezultatul următor este cunoscut ca *teorema de convergenţă dominată a lui Lebesgue.*

0.4.17. TEOREMĂ. *Fie* $\mu \in M(\Omega), \mu \geqslant 0$, *fie* $p \geqslant 1$ *şi fie* $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *un şir de funcţii boreliene cu* $|f_k|^p$ *integrabilă* $(k \geqslant 1)$, *care converge* μ-*aproape peste tot către o funcţie* f. *Să presupunem că există o funcţie integrabilă* $g \geqslant 0$ *astfel încît* $|f_k(\omega)|^p \leqslant g(\omega)$ μ-*aproape peste tot pentru fiecare* k. *Atunci funcţia* $|f|^p$ *este integrabilă şi are loc relaţia*

$$\lim_{k\to\infty} \int |f_k - f|^p \, d\mu = 0.$$

Pentru demonstraţie trimitem la [8], cap. III, § 6.

0.4.18. OBSERVAŢIE. Să presupunem că Ω este un spaţiu topologic compact. Vom nota cu $C(\Omega)$ mulţimea tuturor funcţiilor continue pe Ω, cu valori complexe. Evident, $C(\Omega)$ este un spaţiu liniar, înzestrat cu operaţiile uzuale. Relaţia

$$\|f\| = \sup_{\omega\in\Omega} |f(\omega)|, f \in C(\Omega),$$

furnizează o normă pe $C(\Omega)$, în raport cu care $C(\Omega)$ devine spaţiu Banach.

Rezultatul cu care încheiem acest paragraf ne dă o reprezentare a dualului spaţiului $C(\Omega)$ şi este datorat lui Riesz.

0.4.19. TEOREMĂ. *Fie* Ω *un spațiu topologic compact. Între dualul spațiului* $C(\Omega)$ *și spațiul* $M(\Omega)$ *există un izomorfism care este și izometrie și care leagă fiecare măsură* $\mu \in M(\Omega)$ *de o funcțională* $\varphi_\mu \in C(\Omega)^*$ *prin relația*

$$\varphi_\mu(f) = \int f(\omega)\, d\mu(\omega), \quad f \in C(\Omega).$$

În plus, corespondența $\mu \to \varphi_\mu$ *păstrează pozitivitatea* *).

Acest rezultat important ne va permite să „extindem" elementele dualului lui $C(\Omega)$ la măsuri pe Ω. Demonstrația sa poate fi găsită în [8], cap. IV, § 6.

0.5. ALGEBRE BANACH

Pentru conceptul de algebră, deja întîlnit în paragraful precedent (exemplul 0.4.9), și pentru proprietățile generale ale algebrelor recomandăm lucrările [5] sau [2].

0.5.1. DEFINIȚII. Se numește *algebră normată* un spațiu normat B, care este și algebră asociativă peste corpul complex, al cărei produs este compatibil cu topologia în sensul că

$\|ab\| \leqslant \|a\|\,\|b\|$, a, $b \in B$ (*submultiplicativitatea normei*).

O algebră normată completă se numește *algebră Banach*.

Dacă algebra normată are unitate, aceasta va fi întotdeauna notată cu 1. În acest caz vom identifica corpul complex $\mathbf{C}$ cu subalgebra $\{z \cdot 1\}_{z \in \mathbf{C}}$ și vom scrie simplu z în loc de $z \cdot 1$.

0.5.2. EXEMPLE. 1° Am văzut deja că spațiul $B_e(\Omega)$ este de fapt o algebră (exemplul 0.4.9). Deoarece norma sa este submultiplicativă, rezultă că $B_e(\Omega)$ este o algebră normată (care nu este completă).

2° Spațiul $B(\Omega)$ dotat cu multiplicarea obișnuită a funcțiilor este o algebră, a cărei normă este submultiplicativă. Deoarece $B(\Omega)$ este completatul spațiului normat $B_e(\Omega)$, rezultă că $B(\Omega)$ este o algebră Banach (a se vedea și observația 0.4.11.2°).

3° Spațiul $C(\Omega)$ (definit în observația 0.4.18) înzestrat cu produsul natural este o algebră Banach. Deoarece norma sa se definește tot prin supremumul funcțiilor, rezultă că $C(\Omega)$ este o subalgebră închisă a lui $B(\Omega)$.

4° Dacă X este un spațiu Banach, atunci $\mathscr{L}(X)$ este un spațiu Banach (teorema 0.3.4). Definind operația de înmulțire prin compunerea operatorilor, se poate vedea ușor că acest produs este compatibil cu topologia, deci $\mathscr{L}(X)$ este algebră Banach.

0.5.3. OBSERVAȚIE. Fie B o algebră normată cu unitate. Deoarece $\|1\| = \|1^2\| \leqslant \|1\|\,\|1\|$ și $\|1\| \neq 0$, rezultă că $\|1\| \geqslant 1$. Fără a micșora

*) O funcțională $\varphi \in C(\Omega)^*$ este *pozitivă* dacă $\varphi(f) \geqslant 0$ pentru orice $f \geqslant 0$ din $C(\Omega)$.

generalitatea, putem întotdeauna presupune că $\|1\| = 1$. Într-adevăr, putem redefini norma pe B prin relaţia

$$\|a\|_0 = \sup_{\|x\| \leq 1} \|ax\|, \quad a \in B,$$

ceea ce nu schimbă topologia lui B deoarece $\|1\|^{-1}\|a\| \leqslant \|a\|_0 \leqslant \|a\|$ pentru orice $a \in B$ (cu alte cuvinte, cele două norme pe B sînt *echivalente*). În plus, deoarece se defineşte ca în exemplul 0.5.2.4^0, norma $\|\cdot\|_0$ este submultiplicativă.

0.5.4. DEFINIŢII. Fie B o algebră Banach cu unitate. Vom nota cu $\sigma_B(a)$ mulţimea acelor puncte $z \in \mathbf{C}$ cu proprietatea că elementul $z - a$ nu are invers în B. Mulţimea $\sigma_B(a)$ se va numi *spectrul elementului* a (relativ la algebra B).

Pentru fiecare $a \in B$, numărul

$$r(a) = \overline{\lim_{k \to \infty}} \|a^k\|^{1/k}$$

va fi numit *raza spectrală* a elementului a. Evident, $r(a) \leqslant \|a\|$.

Întrucît conceptul de spectru joacă un rol central în prezentele expuneri, asupra sa vom reveni cu amănunte în capitolul următor.

În cele ce urmează vom enunţa ctieva rezultate valabile în algebrele Banach comutative.

0.5.5. DEFINIŢIE. Fie B o algebră Banach comutativă, cu element unitate. Un *caracter* al algebrei B este un omomorfism de algebre cu unitate de la B în corpul complex $\mathbf{C}$ (adică o aplicaţie liniară, multiplicativă şi care duce unitatea lui B în $1 \in \mathbf{C}$). Vom nota cu $\Gamma(B)$ mulţimea caracterelor pe algebra B. Se poate demonstra că mulţimea $\Gamma(B)$ se identifică în mod natural cu mulţimea idealelor maximale ale lui B (a se vedea de pildă [16], cap. III, § 2).

0.5.6. PROPOZIŢIE. *Pentru fiecare* $a \in V$ *avem egalitatea*

$$\sigma_B(a) = \{\gamma(a) : \gamma \in \Gamma(B)\}.$$

Demonstraţia se poate găsi în [15], cap. III, § 2 . O consecinţă imediată a acestei propoziţii este estimarea

$$|\gamma(a)| \leqslant r(a) \leqslant \|a\|, \ a \in B, \ \gamma \in \Gamma(B),$$

care ne demonstrează, în particular, continuitatea fiecărui caracter al algebrei B, care nu este presupusă în definiţie. Avem, aşadar, $\Gamma(B) \subset B_1^*$, unde $B_1^* = \{f \in B^* : \|f\| \leqslant 1\}$. Vom considera pe $\Gamma(B)$ topologia indusă de $\sigma(B^*, B)$-topologia lui B^* (definiţiile 0.3.14). Cu aceste precizări avem următorul rezultat :

0.5.7. PROPOZIŢIE. *Spaţiul topologic* $\Gamma(B)$ *este compact.*

Pentru demonstraţie trimitem la [15], cap. III, § 2.

Putem enunţa acum rezultatul fundamental privind *reprezentarea algebrelor Banach comutative*, datorat lui Ghelfand.

0.5.8. TEOREMĂ. *Fie B o algebră Banach comutativă, cu unitate. Există atunci un spațiu topologic compact Ω și un omomorfism de algebre cu unitate $a \to \hat{a}$ al algebrei B în $C(\Omega)$ astfel încît*

$$\| \ \| \quad \sup_{\omega \in \Omega} |\hat{a}(\omega)| \leqslant \|a\|, \quad a \in B.$$

Aplicația $a \to \hat{a}$ este o izometrie dacă și numai dacă $\|a^2\| = \|a\|^2$ pentru toate elementele $a \in B$.

Omomorfismul $a \to \hat{a}$ dat de teorema 0.5.8 se mai numește și *transformata Ghelfand*. Detalii privind demonstrația acestui rezultat pot fi găsite în [16], cap. III, § 2. Se ia, desigur, $\Omega = \Gamma(B)$ și $\hat{a}(\gamma) = \gamma(a)$ pentru orice $\gamma \in \Gamma(B)$ (se poate consulta și [7], cap. 2).

Rezultatul care urmează reprezintă o extensie, datorată lui Stone, a teoremei clasice a lui Weierstrass privind aproximarea funcțiilor continue pe un interval compact al dreptei reale prin polinoame.

0.5.9. TEOREMĂ. *Fie Ω un spațiu topologic compact și fie A o subalgebră a algebrei $C(\Omega)$ cu următoarele proprietăți:*

1° algebra A conține funcțiile constante;

2° dacă ω_1, ω_2 sînt puncte distincte din Ω, atunci există o funcție $f \in A$ astfel încît $f(\omega_1) \neq f(\omega_2)$;

3° dacă $f \in A$, atunci și conjugata sa $\bar{f} \in A (\bar{f}(\omega) = \overline{f(\omega)}, \ \omega \in \Omega)$.

În aceste condiții închiderea algebrei A coincide cu $C(\Omega)$.

O demonstrație a acestei teoreme se poate găsi în [5], VII, § 3.

0.5.10. COROLAR. *Fie $K \subset \mathbf{C}$ o mulțime compactă. Atunci algebra polinoamelor în variabilele z și $\bar{z}$ este densă în $C(K)$.*

Într-adevăr, algebra polinoamelor în variabilele z și $\bar{z}$ satisface toate cerințele tereomei 0.5.9.

0.6. EXERCIȚII ȘI COMPLETĂRI

0.6.1. Fie $\{\Omega_1, \mathcal{T}_1\}$, $\{\Omega_2, \mathcal{T}_2\}$ spații topologice și fie $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ o funcție oarecare. Spunem că f este *continuă în punctul* $\omega_1 \in \Omega_1$ dacă pentru orice vecinătate V a punctului $f(\omega_1) \in \Omega_2$ există o vecinătate W a punctului ω_1 astfel încît $f(W) \subset V$. Arătați că funcția f este continuă dacă și numai dacă f este continuă în fiecare punct $\omega_1 \in \Omega_1$.

0.6.2. Fie $\{\Omega, \mathcal{T}\}$ un spațiu topologic separat. Arătați că Ω este spațiu compact dacă și numai dacă pentru orice familie de mulțimi închise $\{F_j\}_{j \in J}$ cu proprietatea că $\cap \{F_j : j \in I\} \neq \emptyset$ pentru orice parte finită $I \subset J$ rezultă $\cap \{F_j : j \in J\} \neq \emptyset$. Altfel spus, spațiul Ω este compact dacă și numai dacă Ω are *proprietatea intersecției finite*.

0.6.3. Fie $\{\Omega_1, \mathcal{T}_1\}$, $\{\Omega_2, \mathcal{T}_2\}$ spații topologice unde Ω_1 este compact iar Ω_2 este separat. Fie $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ o aplicație continuă. Arătați atunci că mulțimea $f(\Omega_1)$ este compactă. Dacă f este și aplicație bijectivă, arătați că inversa $f^{-1} : \Omega_2 \to \Omega_1$ este o aplicație continuă (în legătură cu observația 0.1.6.2°).

0.6.4. Fie $\{M_1, d_1\}$, $\{M_2, d_2\}$ spații metrice și fie funcția $f : M_1 \to M_2$. Arătați că f este continuă în punctul $x_0 \in M_1$ dacă și numai dacă oricare ar fi șirul $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset M_1$ cu $x_k \to x_0$ $(k \to \infty)$ avem $f(x_k) \to f(x_0)$ (în legătură cu observația 0.1.12.2°).

0.6.5. Demonstrați continuitatea operațiilor de adunare și de înmulțire cu scalari în spații normate (în legătură cu observația 0.2.2.2°).

0.6.6. Fie L un spațiu liniar și fie $\varphi : L \times L \to \mathbf{C}$ o aplicație cu următoarele proprietăți: (i) $\varphi(x, x) \geqslant 0$ oricare ar fi $x \in L$, (ii) $\varphi(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 \varphi(x_1, y) + \alpha_2 (x_2, y)$ pentru orice $x_1, x_2, y \in L$ și $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{C}$ și (iii) $\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$ pentru orice $x, y \in L$. Utilizînd faptul că $\varphi(x + \alpha y, x + \alpha y) \geqslant 0$ pentru orice $\alpha \in \mathbf{C}$, unde $x, y \in L$ sînt vectori fixați, demonstrați inegalitatea

$$|\varphi(x, y)|^2 \leqslant \varphi(x, x)\, \varphi(y, y),$$

care este o versiune a inegalității lui Schwarz. Utilizînd acest fapt, demonstrați apoi inegalitatea triunghiului:

$$\varphi(x + y, x + y)^{1/2} \leqslant \varphi(x, x)^{1/2} + \varphi(y, y)^{1/2}$$

(în legătură cu observația 0.2.5).

0.6.7. Fie H un spațiu Hilbert. Un șir $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ se numește *slab convergent* către vectorul $x \in H$ dacă șirul $\{\langle x_k, y\rangle\}_k$ converge la $\langle x, y\rangle$ pentru fiecare $y \in H$. Arătați că dacă șirul $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ converge slab la $x \in H$ iar șirul $\{\| x_k \|\}_{k=1}^{\infty}$ converge la $\| x \|$, atunci șirul $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ converge la x în topologia lui H.

0.6.8. Fie $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ un sistem ortogonal în spațiul Hilbert H. Arătați că dacă $\sum_{k=1}^{\infty} \| x_k \|^2 < \infty$, atunci seria $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ converge către un vector $x \in H$ și are loc, „teorema lui Pitagora“:

$$\| x \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \| x_k \|^2.$$

0.6.9. Fie H un spațiu Hilbert și fie $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ un sistem liniar independent de vectori din H. Vom defini șirul de vectori $y_1 = x_1$, $y_n = x_n - (\lambda_{n1} y_1 + \ldots + \lambda_{n,n-1} y_{n-1})$ $(n \geqslant 2)$.

(i) Determinați coeficienții λ_{nk} din condiția

$$y_n \in \{y_1, \ldots, y_{n-1}\}^{\perp} (n \geqslant 2).$$

(ii) Dacă $e_n = \| y_n \|^{-1} y_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, demonstrați că spațiul liniar generat de sistemul $\{x_1, x_2, \ldots\}$ este egal cu spațiul liniar generat de sistemul $\{e_1, e_2, \ldots\}$. Acesta este așanumitul *procedeu de ortogonalizare Gram-Schmidt* (în legătură cu observația 0.2.12).

0.6.10. Arătați că orice spațiu Hilbert separabil de dimensiune infinită este izomorf cu spațiul Hilbert l^2 format din toate șirurile $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots)$ de numere complexe pentru care

$$\| \alpha \| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 \right)^{1/2} < \infty,$$

dotat cu operațiile de adunare și de înmulțire cu scalari pe componente, spațiu pentru care aplicația $\alpha \to \| \alpha \|$ este o normă ce provine dintr-un produs scalar. Construiți un izomorfism care să fie și izometrie. Stabiliți un rezultat similar pentru spațiile Hilbert de dimensiune finită.

0.6.11. Fie L un spațiu liniar și fie $\varphi : L \times L \to \mathbf{C}$ o aplicație satisfăcînd condițiile (ii) și (iii) de la exercițiul 0.6.6. Arătați că are loc egalitatea

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \varphi(x + \mathrm{i}^k y, x + \mathrm{i}^k y), \quad x, y \in L,$$

unde $\mathrm{i}^2 = -1$. Această egalitate este cunoscută sub numele de *relația de polarizare* (în legătură cu teorema 0.2.15).

0.6.12. Fie X un spațiu Banach și fie $P : X \to X$ o aplicație liniară cu proprietatea $P^2 = P$ și cu $R(P)$, $R(1 - P)$ închise. Utilizînd teorema graficului închis, arătați că P este un operator continuu.

0.6.13. Demonstrați diversele caracterizări ale normei unui operator, enunțate după teorema 0.3.4.

0.6.14. Fie X, Y spații Banach și fie $T : X \to Y$ un operator liniar cu proprietatea (c_0) : T este continuu în origine. Arătați echivalența dintre condiția (c_0), condiția (m) din observația 0.3.6.2^0 și condițiile 1^0 și 2^0 din teorema 0.3.4.

0.6.15. Fie H, K spații Hilbert. Enunțați și demonstrați versiuni ale relațiilor (i), (ii), (iii) și (iv) din observația 0.3.13 pentru operația $T \to T^*$ definită de la $\mathcal{L}(H, K)$ în $\mathcal{L}(K, H)$.

0.6.16. Fie H, K spații Hilbert și fie $T \in \mathcal{L}(H, K)$. Atunci au loc egalitățile (i) $N(T^*) = R(T)^\perp$ și (ii) $\overline{R(T^*)} = N(T)^\perp$.

Indicație. În demonstrarea egalității (ii) folosiți (i), relația $(H_0^\perp)^\perp = H_0$ valabilă pentru orice subspațiu liniar H_0 al lui H precum și faptul că $T^{**}(= (T^*)^*) = T$ (conform exercițiului 0.6.15).

0.6.17. Utilizînd teorema Hahn-Banach, arătați că aplicația $x \to F_x$ a lui X în $X^{**} = (X^*)^*$ definită la 0.3.14 este o izometrie și realizează un izomorfism între spațiul Banach X și un subspațiu închis al lui X^{**}. Spațiul X se numește *reflexiv* dacă $\{F_x : x \in X\} = X^{**}$. Utilizînd teorema 0.3.11, arătați că orice spațiu Hilbert este reflexiv.

0.6.18. Două spații Hilbert H și K se numesc *unitar echivalente* dacă există o aplicație unitară $U : H \to K$. Arătați că orice spațiu Hilbert separabil este unitar echivalent sau cu $\mathbf{C}^n$ pentru un anume n sau cu l^2. Mai general, arătați că două spații Hilbert sînt unitar echivalente dacă și numai dacă bazele lor ortonormale au același cardinal (în legătură cu exercițiul 0.6.10).

0.6.19. Cu notația din definiția 0.3.14, arătați că intersecțiile finite de mulțimi din familia $\{V(x; A, \varepsilon)\}$ se pot scrie ca reuniuni de mulțimi din familie. Pe baza acestui fapt, arătați că reuniunile arbitrare de mulțimi din această familie formează o topologie (care este $\sigma(E, \Gamma)$-topologia lui E).

0.6.20. Fie Ω un spațiu topologic. Arătați că orice combinație liniară de funcții caracteristice de mulțimi boreliene este o funcție simplă. Obțineți de aici faptul că $B_e(\Omega)$ este o algebră comutativă, cu unitate (în legătură cu exemplul 0.4.9).

0.6.21. Fie $f \in B_e(\Omega)$ cu reprezentările

$$f = \alpha_1 \chi_{S_1'} + \ldots + \alpha_n \chi_{S_n'} = \beta_1 \chi_{S_1''} + \ldots + \beta_m \chi_{S_m''},$$

ca în exemplul 0.4.9. Arătați că pentru orice $\mu \in M(\Omega)$ avem

$$\alpha_1 \mu(S_1') + \ldots + \alpha_n \mu(S_n') = \beta_1 \mu(S_1'') + \ldots + \beta_m \mu(S_m''),$$

ceea ce îndreptățește definiția 0.4.12.

0.6.22. Fie $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ un șir de funcții din $B(\Omega)$ cu proprietatea că seria Σf_k este uniform convergentă în $B(\Omega)$. Folosind o variantă a estimărilor din observația 0.4.15, arătați că

$$\int f \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int f_k \, d\mu.$$

0.6.23. Fie Ω un spațiu topologic, fie $\mu \in M(\Omega)$ o măsură pozitivă și fie $p \geqslant 1$ un număr fixat.

(i) Arătați că dacă $f \in B_e(\Omega)$ atunci $|f|^p \in B_e(\Omega)$ și $|f|^p$ se poate reprezenta sub forma $\alpha_1 \chi_{S_1} + \ldots + \alpha_n \chi_{S_n}$, unde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sînt nenegative.

Utilizînd (i), vom putea deci defini cantitatea

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}, \quad f \in B_e(\Omega).$$

(ii) Acceptînd inegalitatea clasică a lui Minkowski

$$[(s_1 + t_1)^p + \ldots + (s_n + t_n)^p]^{1/p} \leqslant (s_1^p + \ldots + s_n^p)^{1/p} + (t_1^p + \ldots + t_n^p)^{1/p},$$

valabilă pentru orice numere nenegative $s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_n$, demonstrați faptul că aplicația $f \to \|f\|_p$ are proprietățile 2° și 3° din definiția 0.2.1 (ε se vedea și exercițiul 4.6.9).

Așadar, ceea ce lipsește aplicației $\|f\|_p$ să fie normă este implicația $\|f\|_p = 0 \Rightarrow f = 0$, care nu este, în general, adevărată. Într-adevăr, dacă $S \in \mathrm{Bor}(\Omega)$, $S \neq \emptyset$ dar $\mu(S) = 0$, atunci $\chi_S \neq 0$ însă $\|\chi_S\|_p = 0$.

(iii) Arătați că mulțimea

$$N^p(\mu) = \{f \in B_e(\Omega) : \|f\|_p = 0\}$$

formează un subspațiu al lui $B_e(\Omega)$.

Vom considera acum spațiul factor $J^p(\mu) = B_e(\Omega)/N^p(\mu)$, pe care vom defini aplicația

$$\|f + N^p(\mu)\|_p = \|f\|_p, \; f \in B_e(\Omega).$$

(iv) Arătați că $\|f + N^p(\mu)\|_p$ nu depinde de reprezentantul f al clasei și definește o normă pe spațiul $J^p(\mu)$.

Vom nota cu $L^p(\Omega, \mu)$ spațiul Banach obținut prin completarea spațiului normat $J^p(\mu)$ (în sensul teoremei 0.2.14). Identificînd funcțiile egale μ-aproape peste tot, spațiul $L^p(\Omega, \mu)$ poate fi și el privit ca un spațiu de funcții (pentru detalii se pot consulta [8], [10] sau [12]).

(v) Arătați că spațiul $L^2(\Omega, \mu)$ este un spațiu Hilbert.

0.6.24. Fie Ω_1, Ω_2 spații topologice compacte. Fie apoi $\varphi_1 \in C(\Omega_1)^*$ și $\varphi_2 \in C(\Omega_2)^*$. Vom considera subalgebra A a algebrei $C(\Omega_1 \times \Omega_2)$ a funcțiilor cu „variabile separate“:

$$h(\omega_1, \omega_2) = \sum_{j \in J} f_j(\omega_1)\, g_j(\omega_2), \qquad f_j \in C(\Omega_1), \; g_j \in C(\Omega_2),$$

unde J este o familie finită de indici.

(i) Arătați că subalgebra A îndeplinește condițiile teoremei 0.5.9.

În virtutea teoremei 0.5.9, algebra A este densă în $C(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Prin urmare, dacă $F \in C(\Omega_1 \times \Omega_2)$ este o funcție arbitrară, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $h \in A$ astfel încît $\|f - h\| < \varepsilon$. În particular, cu reprezentarea de mai sus a lui h,

$$\left| F(\omega_1, \omega_2) - \sum_{j \in J} f_j(\omega_1)\, g_j(\omega_2) \right| < \varepsilon, \qquad \omega_1 \in \Omega_1, \; \omega_2 = \Omega_2.$$

Vom considera funcția $\omega_1 \to \varphi_{2,\omega_2}(F(\omega_1, \omega_2))$ (în care notația φ_{2,ω_2} arată că funcționala φ_2 acționează asupra varabilei ω_2).

(ii) Folosind aproximarea de mai sus, arătați că funcția $\omega_1 \to \varphi_{2,\omega_2}(F(\omega_1, \omega_2))$ este limită uniformă de funcții continue pe Ω_1.

Utilizînd acest fapt, vom putea aplica funcționala φ_1 funcției $\omega_1 \to \varphi_{2,\omega_2}(F(\omega_1, \omega_2))$, deci vom putea defini aplicația

$$\varphi(F) = \varphi_{1,\omega_1}(\varphi_{2,\omega_2}(F(\omega_1, \omega_2))), \qquad F \in C(\Omega_1 \times \Omega_2).$$

(ii·) Arătați că φ este o funcțională liniară și continuă pe $C(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Dacă μ_1, μ_2 sînt măsurile care corespund funcționalelor φ_1 și respectiv φ_2 prin teorema 0.4.19, vom nota cu $\mu_1 \times \mu_2$ măsura care corespunde funcționalei φ prin aceeași teoremă.

(iv) Refaceți construcția precedentă aplicînd întîi funcționala φ_1 și apoi funcționala φ_2. Arătați că funcționala φ rămîne neschimbată. Deduceți de aici egalitatea

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(\omega_1, \omega_2)\, d\mu_1 \times \mu_2 = \int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2} F(\omega_1, \omega_2)\, d\mu_2\right) d\mu_1 = \int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1} F(\omega_1, \omega_2)\, d\mu_1\right) d\mu_2$$

pentru orice $F \in C(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Această formulă reprezintă o versiune a *teoremei lui Fubini* de permutare a integralelor iterate.

1. CALCUL FUNCȚIONAL ANALITIC

În cuprinsul acestui capitol vom prezenta construcția calculului funcțional analitic pentru elementele unei algebre Banach și pentru operatorii liniari nemărginiți într-un spațiu Banach. Prezentarea este însoțită de cîteva rezultate privind funcțiile cu valori vectoriale.

1.1. INTEGRAREA FUNCȚIILOR VECTORIALE

Fie Ω un spațiu topologic și fie X un spațiu Banach cu norma $\|\cdot\|$. Ne propunem să construim integrala unor funcții definite pe Ω, cu valori în X, în raport cu o măsură $\mu \in M(\Omega)$ (a se vedea deifnițiile 0.4.5). Vom considera mai întîi funcții vectoriale simple, definite prin analogie cu cele scalare (exemplul 0.4.9).

1.1.1 DEFINIȚIE. O aplicație de forma

$$f(\omega) = \sum_{j \in J} \chi_{S_j}(\omega) x_j, \quad \omega \in \Omega,$$

unde J este o familie finită de indici, $\{S_j\}_{j \in J} \subset \mathrm{Bor}(\Omega)$, $\bigcup \{S_j : j \in J\} = \Omega$, $S_j \cap S_k = \emptyset$ $(j \neq k)$ și $x_j \in X$ se numește *funcție simplă* (sau *etajată*), *cu valori în* X.

Vom nota cu $B_e(\Omega, X)$ mulțimea funcțiilor etajate pe Ω, cu valori în X. Este ușor de văzut că suma a două funciții etajate este o funcție etajată; clasa fiind evident stabilă la înmulțirea cu scalari, rezultă că familia $B_e(\Omega, X)$ se poate organiza ca spațiu liniar. Pe spațiul $B_e(\Omega, X)$ vom putea defini o normă prin relația

$$\|f\| = \sup_{\omega \in \Omega} \|f(\omega)\|, \; f \in B_e(\Omega, X).$$

1.1.2. DEFINIȚIE. Fie $\mu \in M(\Omega)$ și fie $f \in B_e(\Omega, X)$, reprezentată ca în definiția 1.1.1. Vom introduce *integrala* funcției f în raport cu măsura μ prin relația

$$\int f \, d\mu = \sum_{j \in J} \mu(S_j) x_j.$$

Dacă $S \in \mathrm{Bor}(\Omega)$, definim *integrala* funcţiei f în raport cu măsura μ *pe mulţimea* S prin relaţia

$$\int_S f\,\mathrm{d}\mu = \int \chi_S f\,\mathrm{d}\mu = \sum_{j\in J} \mu(S_j \cap S)x_j.$$

Vom mai nota aceste integrale prin $\int f(\omega)\mathrm{d}\mu(\omega)$ şi respectiv $\int_S f(\omega)\mathrm{d}\mu(\omega)$, atunci cînd dorim să punem în evidenţă variabila de integrare.

1.1.3. LEMĂ. *Aplicaţia* $B_e(\Omega, X) \ni f \to \int_S f(\omega)\,\mathrm{d}\mu(\omega) \in X$ *este corect definită, liniară şi satisface estimările*

$$\left\|\int_S f(\omega)\,\mathrm{d}\mu(\omega)\right\| \leqslant \int_S \|f(\omega)\|\, v(\mu\,;\mathrm{d}\omega) \leqslant \sup_{\omega\in S}\|f(\omega)\|\, v(\mu\,;S).$$

Demonstraţie. Independenţa integralei de reprezentarea funcţiei f se obţine ca şi în cazul scalar (exerciţiul 0.6.21). Mai precis, dacă $f = \chi_{S_1}x_1 + \ldots + \chi_{S_n}x_n$, printr-o grupare convenabilă a termenilor obţinem o reprezentare unică de forma $f = \chi_{S'_1}x'_1 + \ldots + \chi_{S'_n}x'_n$, unde $x'_1, \ldots, x'_n$, sînt vectori distincţi. Atunci avem egalitatea $\mu(S_1 \cap S)x_1 + \ldots + \mu(S_n \cap S)x_n = \mu(S'_1 \cap S)x'_1 + \ldots + \mu(S'_n \cap S)x'_n$, adică independenţa dorită.

Vom obţine acum aditivitatea integralei pe spaţiul $B_e(\Omega, X)$.

Fie $f = \sum_{j\in J}\chi_{S'_j}x_j$, $g = \sum_{k\in K}\chi_{S''_k}y_k$ două funcţii din $B_e(\Omega, X)$, cu reprezentarea din definiţia 1.1.1. Atunci funcţia

$$f + g = \sum_{j,k}\chi_{S'_j\cap S''_k}(x_j + y_k)$$

este reprezentată ca în definiţia 1.1.1, prin urmare, pe baza primei părţi, vom putea scrie că

$$\int_S (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \sum_{j,k}\mu(S \cap S'_j \cap S''_k)(x_j + y_k) =$$

$$= \sum_{j,k}\mu(S \cap S'_j \cap S''_k)x_j + \sum_{j,k}\mu(S \cap S'_j \cap S''_k)y_k = \int_S f\,\mathrm{d}\mu + \int_S g\mathrm{d}\mu.$$

Întrucît demonstrarea omogenităţii integralei este simplă, deducem de aici liniaritatea integralei pe spaţiul $B_e(\Omega, X)$.

Fie din nou $f \in B_e(\Omega, X)$ cu reprezentarea din definiția 1.1.1. Să remarcăm atunci că funcția $\omega \to \|f(\omega)\|$ este din $B_e(\Omega)$ și că putem scrie, în virtutea teoremei 0.4.7, următoarele relații :

$$\left\| \int_S f(\omega)\, d\mu(\omega) \right\| \leqslant \sum_{j \in J} \|x_j\|\, |\mu(S \cap S_j)| \leqslant \sum_{j \in J} \|x_j\|\, v(\mu;\ S \cap S_j) =$$

$$= \int_S \|f(\omega)\|\, v(\mu;\ d\omega) = \int \chi_S(\omega)\, \|f(\omega)\| v(\mu;\ d\omega) \leqslant \sup_{\omega \in S} \|f(\omega)\|\, v(\mu;\ S),$$

adică estimările din enunțul lemei.

Integrala introdusă prin definiția 1.1.2 se poate extinde la o clasă mai largă de funcții vectoriale, suficient de bogată pentru a satisface cerințele noastre.

1.1.4. DEFINIȚII. Completatul spațiului normat $B_e(\Omega, X)$ (în sensul teoremei 0.2.14) va fi notat cu $B(\Omega, X)$. Acesta este un spațiu Bananch de funcții pe Ω, cu valori în X, care sînt limite (uniforme) de șiruri de funcții din $B_e(\Omega, X)$, cu norma dată de aceeași formulă ca în definiția 1.1.1 (exercițiul 1.7.3).

Fie $f \in B(\Omega, X)$ și fie $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset B_e(\Omega, X)$ astfel încît $f_k \to f$ $(k \to \infty)$ în $B(\Omega, X)$. Pentru fiecare $\mu \in M(\Omega)$ și $S \in \mathrm{Bor}(\Omega)$ vom defini

$$\int_S f\, d\mu = \lim_{k \to \infty} \int_S f_k\, d\mu.$$

1.1.5. PROPOZIȚIE. *Aplicația*

$$B(\Omega, X) \ni f \to \int_S f(\omega)\, d\mu(\omega) \in X$$

este corect definită, liniară și satisface estimările

$$\left\| \int_S f(\omega)\, d\mu(\omega) \right\| \leqslant \int_S \|f(\omega)\|\, v(\mu;\ d\omega) \leqslant \sup_{\omega \in S} \|f(\omega)\| v(\mu;\ S).$$

Demonstrație. Fie $f \in B(\Omega, X)$ și fie $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset B_e(\Omega, X)$ un șir convergent către f în $B(\Omega, X)$. În baza liniarității integralei pe $B_e(\Omega, X)$ și a estimărilor sale (lema (1.1.3), putem scrie că

$$\left\| \int_S f_k\, d\mu - \int_S f_m\, d\mu \right\| \leqslant \|f_k - f_m\|\, v(\mu;\ S) \to 0 \quad (k,\ m \to \infty).$$

Aceasta ne arată că șirul $\left\{ \int_S f_k\, d\mu \right\}_k$ este convergent în X. Mai mult

decît atît, limita $\int_S f\,d\mu$ nu depinde de șirul $\{f_k\}_k$. Într-adevăr, dacă $\{g_k\}_{k=1}^{\infty} \subset B_e(\Omega, X)$ este un alt șir convergent către f în $B(\Omega, X)$, o relație similară cu cea de dinainte (în care înloucim pe f_m cu g_k) ne arată că șirul $\left\{\int_S g_k\,d\mu\right\}_k$ converge tot către $\int_S f\,d\mu$, ceea ce atestă corectitudinea definiției integralei.

Dacă f, g sînt funcții arbitrare din $B(\Omega, X)$ și dacă $f = \lim_{k\to\infty} f_k$, $g = \lim_{k\to\infty} g_k$ cu f_k, $g_k \in B_e(\Omega, X)$, atunci vom avea

$$\int_S (f+g)\,d\mu = \lim_{k\to\infty}\int_S (f_k+g_k)\,d\mu = \int_S f\,d\mu + \int_S g\,d\mu,$$

în baza aditivității integralei pe spațiul $B(\Omega, X)$. Demonstrarea omogenității integralei o lăsam pe seama cititorului. În sfîrșit, estimările afirmate în enunț se obțin din cele demonstrate în lema 1.1.3, prin simplă trecere la limită.

1.1.6. TEOREMĂ. *Fie Ω un spațiu topologic, fie X, Y, spații Banach și fie $T \in \mathscr{C}(X, Y)$. Vom considera o funcție $f \in B(\Omega, X)$ astfel încît $f(\omega) \in D(T)$ oricare ar fi $\omega \in \Omega$. Dacă $T \circ f \in B(\Omega, Y)$, atunci are loc egalitatea*

$$\int_S T \circ f\,d\mu = T\left(\int_S f\,d\mu\right)$$

oricare ar fi $\mu \in M(\Omega)$ și $S \in \mathrm{Bor}(\Omega)$.

Demonstrație. Deoarece $f \in B(\Omega, X)$, pentru orice întreg $m \geqslant 1$ există o funcție $f_m \in B_e(\Omega, X)$ astfel încît $\|f - f_m\| \leqslant 1/(2m)$. În mod analog există $g_m \in B_e(\Omega, Y)$ astfel încît $\|T \circ f - g_m\| \leqslant 1/(2m)$. Să presupunem că avem reprezentările

$$f_m(\omega) = \sum_{j\in J_m} \chi_{S'_j}(\omega) x_j, \quad g_m(\omega) = \sum_{k\in K_m} \chi_{S''_k}(\omega)\, y_k,$$

în sensul definit la 1.1.1. Vom nota $S_{jk} = S'_j \cap S''_k$, vom fixa punctele $\omega_{jk} \in S_{jk}$ și vom defini funcția

$$h_m(\omega) = \sum_{j,k} \chi_{S_{jk}}(\omega) f(\omega_{jk}), \quad \omega \in \Omega.$$

Să remarcăm că pentru fiecare $\omega \in \Omega$ există o pereche unică de indici (j, k) astfel încît $\omega \in S_{jk}$. Atunci $f_m(\omega) = f_m(\omega_{jk})$, deci vom avea

$$\|f(\omega) - h_m(\omega)\| \leqslant \|f(\omega) - f_m(\omega)\| + \|f_m(\omega) - h_m(\omega)\| \leqslant 1/m,$$

oricare ar fi $\omega \in \Omega$. În mod asemănător,

$$\|(T \circ f)(\omega) - (T \circ h_m)(\omega)\| \leqslant 1/m, \quad \omega \in \Omega.$$

Deoarece operatorul T este închis, graficul său $G(T)$ este un subspaţiu închis în $X \times Y$. Proprietăţile şirului $\{h_m\}_m$ ne arată că funcţia

$$\varphi = (f,\ T \cdot f) = \lim_{m \to \infty} (h_m,\ T \cdot h_m)$$

este un element în $B(\Omega, G(T))$. Din modul în care se calculează integrala unei funcţii cu valori într-un spaţiu produs (a se vedea exerciţiul 1.7.4), rezultă că

$$\int_S \varphi \, \mathrm{d}\mu = \left(\int_S f \, \mathrm{d}\mu, \int_S T \cdot f \, \mathrm{d}\mu \right) \in G(T).$$

Prin urmare, $\int_S f \, \mathrm{d}\mu \in D(T)$ şi $T\left(\int_S f \mathrm{d}\mu \right) = \int_S T \cdot f \, \mathrm{d}\mu$.

1.1.7. COROLAR. *Fie Ω, X, Y ca în teorema precedentă. Dacă $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ şi $f \in B(\Omega, X)$, atunci $T \cdot f \in B(\Omega, Y)$ şi are loc egalitatea*

$$\int_S T \cdot f \, \mathrm{d}\mu = T\left(\int_S f \mathrm{d}\mu \right),$$

oricare ar fi $\mu \in M(\Omega)$ şi $S \in \mathrm{Bor}(\Omega)$. În particular, dacă $Y = \mathbf{C}$,

$$\int_S x^* \cdot f \, \mathrm{d}\mu = x^* \left(\int_S f \mathrm{d}\mu \right)$$

oricare ar fi $x^* \in X^*$.

Demonstraţie. Vom remarca doar faptul că dacă $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset B_e(\Omega, X)$ şi $f_k \to f$ $(k \to \infty)$ în $B(\Omega, X)$, atunci $T \cdot f_k \in B_e(\Omega, Y)$ şi $T \cdot f_k \to T \cdot f$ în $B(\Omega, Y)$. Restul afirmaţiilor rezultă din teorema precedentă.

1.1.8. OBSERVAŢII. 1° Teorema 1.1.6 se poate utiliza, în particular, la obţinerea unor rezultate legate de derivarea integralelor depinzînd de parametri (ca în exerciţiul 1.7.5).

2° A doua parte a corolarului 1.1.7 se poate utiliza la stabilirea unor formule pe care le satisfac anumite integrale vectoriale, în baza validităţii variantelor scalare ale acestor formule (de exemplu formula lui Cauchy, teorema lui Fubini etc.).

În cele ce urmează vom avea nevoie de un concept mai general decît cel oferit de definiţia 0.4.8.

1.1.9. DEFINIŢIE. Fie Ω_1, Ω_2 spaţii topologice. O aplicaţie $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ se numeşte *boreliană* dacă $f^{-1}(S) \in \mathrm{Bor}(\Omega_1)$, oricare ar fi $S \in \mathrm{Bor}(\Omega_2)$.

1.1.10. LEMĂ. *O aplicaţie $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ este boreliană dacă şi numai dacă $f^{-1}(S) \in \mathrm{Bor}(\Omega_1)$ pentru orice parte deschisă (închisă) $S \subset \Omega_2$.*

Demonstrație. Necesitatea condiției este evidentă. Invers, fie

$$\mathscr{B} = \{S \subset \Omega_2 : f^{-1}(S) \in \mathrm{Bor}(\Omega_1)\}.$$

Să remarcăm că $\mathscr{B}$ este o σ-algebră. Într-adevăr, $\emptyset \in \mathscr{B}$ iar dacă $S \in \mathscr{B}$, atunci $f^{-1}(\Omega_2 \setminus S) = \Omega_1 \setminus f^{-1}(S) \in \mathrm{Bor}(\Omega_1)$, deci și $\Omega_2 \setminus S \in \mathscr{B}$. În sfîrșit, dacă $\{S_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathscr{B}$, atunci

$$f^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}(S_k) \in \mathrm{Bor}(\Omega_1),$$

deci $\bigcup \{S_k : k \geqslant 1\} \in \mathscr{B}$, ceea ce arată că B este o σ-algebră care conține, prin ipoteză, părțile deschise (sau închise) ale lui Ω_2. Așadar, $\mathscr{B} \cap \mathrm{Bor}(\Omega_2)$, de unde rezultă faptul că f este boreliană. În particular, avem următoarea afirmație:

1.1.11. COROLAR. *Orice aplicație continuă $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ este boreliană.*

Situația care ne interesează, pentru moment, este aceea a funcțiilor cu valori vectoriale.

1.1.12. LEMĂ. *Dacă $f \in B(\Omega, X)$, atunci f este o aplicație boreliană.*

Demonstrație. Dacă funcția f ia valori constante pe un număr finit de mulțimi boreliene a căror reuniune epuizează întreg spațiul, rezultă că preimaginea oricărei submulțimi din X este o reuniune finită de mulțimi boreliene, deci ea însăși borelianâ. Așadar funcțiile din $B_e(\Omega, X)$ sînt boreliene.

Fie acum $f \in B(\Omega, X)$ arbitrară și fie $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset B_e(\Omega, X)$ un șir care converge la f în $B(\Omega, X)$. Fără a micșora generalitatea, vom putea presupune că $\|f - f_k\| \leqslant k^{-1}$ oricare ar fi $k \geqslant 1$. Vom fixa o parte închisă $S \subset X$ și vom defini mulțimile

$$S_k = \{x \in X : \inf_{y \in S} \|x - y\| \leqslant k^{-1}\}, \quad k \geqslant 1.$$

Este ușor de văzut că mulțimile S_k sînt închise în X. Vom demonstra egalitatea

$$f^{-1}(S) = \bigcap_{k=1}^{\infty} f_k^{-1}(S_k).$$

Într-adevăr, dacă $\omega \in f^{-1}(S)$, din relația $\|f(\omega) - f_k(\omega)\| \leqslant k^{-1}$ rezultă $f_k(\omega) \in S_k$, deci $\omega \in f_k^{-1}(S_k)$, oricare ar fi $k \geqslant 1$.

Reciproc, dacă $\omega \in f_k^{-1}(S_k)$ pentru orcie $k \geqslant 1$, în baza definiției mulțimii S_k vom putea alege un vector $x_k \in S$ astfel încît $\|f_k(\omega) - x_k\| \leqslant 2k^{-1}$. Să remarcăm atunci că

$$\|f(\omega) - x_k\| \leqslant \|f(\omega) - f_k(\omega)\| + \|f_k(\omega) - x_k\| \leqslant 3k^{-1};$$

prin urmare, șirul $x_k \to f(\omega)$ $(k \to \infty)$. Mulțimea S fiind închisă, obținem $f(\omega) \in S$.

Din faptul că funcțiile simple sînt boreliene, din reprezentarea mulțimii $f^{-1}(S)$ și din aceea că familia $\mathrm{Bor}(\Omega)$ este închisă și la intersecții

numărabile (fiind închisă la reuniuni numărabile și la operația de complementare), rezultă că mulțimea $f^{-1}(S)$ este boreliană, oricare ar fi $S \subset X$ închisă. Pe baza lemei 1.1.10 obținem că f este boreliană.

1.1.13. LEMĂ. *Dacă $f \in B(\Omega, X)$, atunci submulțimea $f(\Omega)$ este relativ compactă în X.*

Demonstrație. Fie $\varepsilon > 0$ și fie $f \in B_\varepsilon(\Omega, X)$ astfel încît $\|f - f_\varepsilon\| < \varepsilon/2$. Funcția f_ε are doar un număr finit de valori, să zicem $y_1, \ldots, y_{n_\varepsilon}$. Fie $\omega_j \in \Omega$ astfel încît $y_j = f_\varepsilon(\omega_j)$ $(j = 1, \ldots, n_\varepsilon)$. Vom nota $x_j = f(\omega_j)$ și vom observa că dacă $x \in f(\Omega)$, $x = f(\omega)$, atunci există un indice j astfel încît $f_\varepsilon(\omega) = f_\varepsilon(\omega_j)$. Prin urmare,

$$\|x - x_j\| \leqslant \|f(\omega) - f_\varepsilon(\omega)\| + \|f_\varepsilon(\omega_j) - f(\omega_j)\| < \varepsilon.$$

Aceasta arată că mulțimea $f(\Omega)$ poate fi acoperită cu reuniunea mulțimilor $B(x_j, \varepsilon) = \{x \in X : \|x - x_j\| < \varepsilon\}$ $(j = 1, \ldots, n_\varepsilon)$. Așadar, mulțimea $f(\Omega)$ este total mărginită (definiția 0.1.13). În virtutea teoremei 0.1.14, mulțimea $f(\Omega)$ este relativ compactă.

1.1.14. TEOREMĂ. *Fie f o funcție definită pe spațiul topologic Ω, cu valori în spațiul Banach X. Funcția f aparține spațiului $B(\Omega, X)$ dacă și numai dacă f este boreliană și $f(\Omega)$ este o parte relativ compactă a spațiului X.*

Demonstrație. Din lemele 1.1.12 și 1.1.13 se obține că dacă $f \in B(\Omega, X)$ atunci f este boreliană și $f(\Omega)$ este relativ compactă.

Reciproc, să demonstrăm că aceste două condiții asigură apartenența lui f la spațiul $B(\Omega, X)$. Deoarece mulțimea $f(\Omega)$ este total mărginită, pentru fiecare număr întreg $m \geqslant 1$ există un număr finit de puncte $x_j = f(\omega_j)$ $(j \in J_m)$ astfel încît

$$f(\Omega) \subset \bigcup_{j \in J_m} \{x \in X : \|x - x_j\| \leqslant m^{-1}\}.$$

Mulțimile $S'_j = f^{-1}(\{x \in X : \|x - x_j\| < m^{-1}\})$ sînt în $\mathrm{Bor}(\Omega)$, prin ipoteză. Definind prin recurență, $S_1 = S'_1$, $S_2 = S'_2 \setminus S_1$,

$$S_k = S'_k \setminus S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_{k-1}, \quad k \geqslant 2,$$

obținem o familie finită de mulțimi boreliene disjuncte două cîte două, a căror reuniune este întreg spațiul Ω. Definind funcția simplă

$$f_m(\omega) = \sum_{j \in J_m} \chi_{S_j}(\omega) f(\omega_j),$$

obținem

$$\|f(\omega) - f_m(\omega)\| \leqslant \sum_{j \in J_m} \|f(\omega) - f(\omega_j)\| \chi_{S_j}(\omega) < m^{-1},$$

ceea ce arată că șirul de funcții simple $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ converge uniform către funcția f. Așadar, $f \in B(\Omega, X)$, ceea ce încheie demonstrația.

1.1.15. DEFINIȚIE. Fie Ω un spațiu topologic compact. Vom nota cu $C(\Omega, X)$ mulțimea tuturor funcțiilor continue, definite pe Ω, cu valori în X. Dotat cu operațiile uzuale și cu norma definită prin supremul funcțiilor pe Ω, spațiul $C(\Omega, X)$ devine spațiul Banach (exercițiul 1.7.6).

1.1.16. COROLAR. *Dacă Ω este un spațiu topologic compact, atunci $C(\Omega, X)$ este un subspațiu închis în $B(\Omega, X)$.*

Demonstrație. Funcțiile continue sînt boreliene în virtutea corolarului 1.1.11. Prin urmare, teorema 1.1.14 ne asigură că orice funcție continuă pe un spațiu compact este din $B(\Omega, X)$. În sfîrșit, deoarece normele în spațiile $B(\Omega, X)$ și $C(\Omega, X)$ se definesc prin aceeași formulă, $C(\Omega, X)$ este subspațiu închis în $B(\Omega, X)$.

Corolarul 1.1.16 permite integrarea funcțiilor vectoriale continue pe un spațiu topologic compact în raport cu orice măsură Radon.

1.2. FUNCȚII ANALITICE VECTORIALE

Fie X un spațiu Banach fixat.

1.2.1. DEFINIȚIE. O expresie de forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} w^k x_k, \tag{1.2.1}$$

unde $w \in \mathbf{C}$ și $x_k \in X$ pentru orice $k \geqslant 0$, va fi numită *serie formală* (cu coeficienți în X). Vom atașa expresiei (1.2.1) cantitatea

$$\rho = \overline{\lim_{k \to \infty}} \|x_k\|^{1/k}.$$

Raza de convergență a seriei formale (1.2.1) va fi dată de $R = \rho^{-1}$, în care luăm $R = \infty$ dacă $\rho = 0$ și $R = 0$ dacă $\rho = \infty$. Situația care ne interesează este atunci cînd $0 < R \leqslant \infty$.

1.2.2. LEMĂ. *Fie $\sum_{k=0}^{\infty} w^k x_k$ o serie formală cu raza de convergență $R > 0$. Această serie este convergentă pentru fiecare punct $w \in \mathbf{C}$ cu $|w| < R$; în plus, convergența este uniformă pe mulțimile de forma $\{w \in \mathbf{C} : |w| \leqslant r\}$, unde $0 \leqslant r < R$.*

Demonstrație. Evident, a doua afirmație o implică pe prima. Fie deci $\rho = R^{-1}$ ($\rho \neq \infty$, datorită ipotezei) și fie $0 \leqslant r < R$. Vom fixa un număr $\varepsilon > 0$ cu $\varepsilon < r^{-1} - \rho$. Din definiția lui ρ rezultă existența unui indice $k(\varepsilon)$ astfel încît

$$\|x_k\| \leqslant (\rho + \varepsilon^k), \quad k > k(\varepsilon).$$

Notînd

$$M_\varepsilon = \max \{1, \ \|x_k\|/(\rho + \varepsilon)^k, \ k = 1, \ldots, k(\varepsilon)\},$$

deducem că

$$\|x_k\| \leqslant M_\varepsilon (\rho + \varepsilon)^k, \quad k \geqslant 1.$$

Deoarece $\rho + \varepsilon < r^{-1}$, avem $r(\rho + \varepsilon) < 1$ şi deci

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} w^k x_k \right\| \leqslant M_\varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} r^k (\rho + \varepsilon)^k = \frac{M_\varepsilon}{1 - r(\rho + \varepsilon)},$$

de unde rezultă toate afirmaţiile lemei.

1.2.3. DEFINIŢIE. Fie $U \subset \mathbf{C}$ o submulţime deschisă. Vom spune că funcţia $f : U \to X$ este *analitică* (*olomorfă*) în U dacă pentru fiecare punct $z_0 \in U$ există o serie formală $\sum_{k=0}^{\infty} w^k x_k$ cu raza de convergenţă $R > 0$, astfel încît

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (z - z_0)^k x_k, \quad z \in U, \quad |z - z_0| < R.$$

Vom nota cu $A(U, X)$ mulţimea funcţiilor analitice în U, cu valori în X.

1.2.4. LEMĂ. 1° *Dacă* $f \in A(U, X)$, *atunci* f *este continuă pe* U.

2° *Dacă o funcţie* $f : U \to X$ *este analitică, atunci* $x^* \circ f$ *este o funcţie analitică scalară, oricare ar fi* $x^* \in X^*$.

Demonstraţie. 1° Fie $z_0 \in U$ un punct fixat. În baza definiţiei 1.2.3 şi a lemei 1.2.2, există o vecinătate compactă a punctului z_0 astfel încît f este limita uniformă a unei serii ale cărei sume parţiale sînt evident funcţii continue. Aşadar, funcţia f este continuă în vecinătatea unui punct arbitrar, deci continuă peste tot în U.

2° Dacă f este analitică în U şi are în vecinătatea punctului z_0 reprezentarea descrisă în definiţia 1.2.3, atunci, pentru orice $x^* \in X^*$, seria $\sum_{k=0}^{\infty} (z - z_0)^k x^*(x_k)$ este convergentă pentru $|z - z_0| < R$, deci funcţia $x^* \circ f$ este o funcţie analitică scalară (a se vedea şi propoziţia 1.2.10).

Pentru a determina proprietăţile algebrice ale spaţiului $A(U, X)$, mai avem nevoie de cîteva afirmaţii privind seriile formale.

1.2.5. LEMĂ. 1° *Suma a două serii formale cu raza de convergenţă nenulă este o serie formală cu raza de convergenţă nenulă.*

2° *Dacă spaţiul valorilor este o algebră Banach cu unitate, atunci produsul a două serii formale cu raza de convergenţă nenulă este o serie formală cu raza de convergenţă nenulă.*

Demonstraţie. 1° Fie $\sum_{k \geqslant 0} w^k x_k$, $\sum_{k \geqslant 0} w^k y_k$ două serii formale astfel încît

$$\rho_1 = \overline{\lim_{k \to \infty}} \|x_k\|^{1/k} < \infty, \quad \rho_2 = \overline{\lim_{k \to \infty}} \|y_k\|^{1/k} < \infty.$$

Să observăm că

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\|x_k+y_k\|^{1/k} \leqslant \overline{\lim_{k\to\infty}}\|x_k\|^{1/k}+\overline{\lim_{k\to\infty}}\|y_k\|^{1/k}=\rho_1+\rho_2<\infty.$$

Aşadar, seria formală $\sum_{k>0} w^k(x_k+y_k)$ are raza de convergenţă nenulă.

2° Să presupunem că $X=B$, unde B este o algebră Banach cu unitate. Să considerăm seriile formale (cu coeficienţii în B) $\sum_{k>0} w^k a_k$ şi $\sum_{k>0} w^k b_k$, şi să notăm, ca la punctul precedent,

$$\rho_1=\overline{\lim_{k\to\infty}}\|a_k\|^{1/k},\quad \rho_2=\overline{\lim_{k\to\infty}}\|b_k\|^{1/k}.$$

Să remarcăm că

$$\left(\sum_{k>0} w^k a_k\right)\left(\sum_{k>0} w^k b_k\right)=\sum_{k\geqslant 0} w^k\left(\sum_{p+q=k} a_p b_q\right).$$

Folosind argumentul utilizat în demonstraţia lemei 1.2.2, deducem existenţa unor numere $M'_\varepsilon \geqslant 1$, $M''_\varepsilon \geqslant 1$ astfel încît

$$\|a_k\| \leqslant M'_\varepsilon(\rho_1+\varepsilon/2)^k,\quad \|b_k\| \leqslant M''_\varepsilon(\rho_2+\varepsilon/2)^k,$$

unde $\varepsilon>0$ este un număr dat. Vom putea scrie atunci că

$$\left\|\sum_{p+q=k} a_p b_q\right\| \leqslant M'_\varepsilon M''_\varepsilon \sum_{p+q=k}(\rho_1+\varepsilon/2)^p(\rho_2+\varepsilon/2)^q \leqslant M'_\varepsilon M''_\varepsilon(\rho_1+\rho_2+\varepsilon)^k,$$

de unde

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left\|\sum_{p+q=k} a_p b_q\right\|^{1/k} \leqslant \rho_1+\rho_2,$$

deoarece $\varepsilon>0$ este arbitrar, ceea ce încheie demonstraţia.

1.2.6. PROPOZIŢIE. *Fie $U\subset\mathbf{C}$ o mulţime deschisă. Atunci $A(U,X)$, dotată cu operaţiile uzuale de adunare şi de înmulţire cu scalari, este un spaţiu liniar. Dacă X este o algebră Banach cu unitate B, atunci $A(U,B)$ este o algebră.*

Demonstraţie. Fie $f_1, f_2 \in A(U,X)$. Atunci funcţia $f=f_1+f_2$ [unde $f(z)=f_1(z)+f_2(z)$, $z\in U$] este o funcţie analitică, în baza primei părţi a lemei precedente.

Dacă X este o algebră Banach cu unitate, atunci funcţia $g=f_1f_2$ [unde $g(z)=f_1(z)f_2(z)$, $z\in U$] este o funcţie analitică, în baza părţii a doua a lemei 1.2.5.

1.2.7. DEFINIŢIE. Fie $I=\{s\in\mathbf{R}: s_0\leqslant s\leqslant s_1\}$ un interval compact al dreptei reale şi fie $\xi: I\to\mathbf{C}$ o funcţie continuă cu variaţie mărginită (a se vedea [4], cap. 5, §1). Vom presupune că $\xi(s_0)=\xi(s_1)$ dar $\xi(s')\neq\xi(s'')$ pentru orice altă pereche de puncte diferite s', s'' din I. În acest caz imaginea $\Gamma=\xi(I)$ se va numi *curbă jordaniană rectificabilă.*

Dacă $f \in C(\Gamma, X)$, atunci putem defini *integrala curbilinie* a funcției f pe curba Γ prin formula

$$\int_{\Gamma} f(\xi)\, d\xi = \int_{s_0}^{s_1} f(\xi(s))\, d\xi(s),$$

unde, în membrul drept, $d\xi(s)$ desemnează măsura Lebesgue-Stieltjes asociată funcției cu variație mărginită ξ (a se vedea [8], cap. III, § 5). Integrala curbilinie depinde doar de funcția f și de mulțimea Γ, nu și de reprezentarea lui Γ ca imagine a lui I prin funcția ξ (exercițiul 1.7.8).

Fie $\Delta \subset \mathbf{C}$ o mulțime deschisă, relativ compactă. Vom nota cu Γ frontierea mulțimii Δ și vom presupune că $\Gamma = \Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_m$, unde $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$ sînt curbe jordaniene rectificabile, care nu se intersectează două cîte două. Mai presupunem că

$$\Gamma_j = \xi_j(I_j), \quad I_j = \{s \in \mathbf{R} : s_{0,j} \leqslant s \leqslant s_{1,j}\}, \quad j = 1, \ldots, m.$$

În baza teoremei clasice de separare a lui Jordan (o demonstrație a acestei teoreme poate fi găsită în lucrarea [15]), fiecare curbă Γ_j este frontiera unei mulțimi deschise, relativ compacte și conexe Δ_j (formată din punctele aflate în „interiorul" curbei Γ_j).

Vom spune că sistemul finit de curbe jordaniene rectificabile Γ este *pozitiv orientat* (*în raport cu* Δ) dacă acest sistem satisface următoarele cerințe: (i) dacă $\Delta_j \cap \Delta \neq \emptyset$, atunci curba Γ_j este parcursă de către punctul $\xi_j(s)$ în sens contrar acelor unui ceasornic, atunci cînd s variază de la $s_{0,j}$ la $s_{1,j}$; (ii) dacă $\Delta_j \cap \Delta = \emptyset$, atunci curba Γ_j este parcursă de către punctul $\xi_j(s)$ în sensul acelor unui ceasornic, atunci cînd s variază de la $s_{0,j}$ la $s_{1,j}$.

Indiferent de orientare, din aditivitatea integralei avem relația

$$\int_{\Gamma} f(\xi)\, d\xi = \sum_{j=1}^{m} \int_{\Gamma_j} f(\xi)\, d\xi,$$

unde $\xi : \Gamma \to \mathbf{C}$ este dată de $\xi | \Gamma_j = \xi_j$ $(j = 1, \ldots, m)$.

Rezultatul care urmează reprezintă o extensie vectorială a *formulei lui Cauchy*.

1.2.8. TEOREMĂ. *Fie $U \subset \mathbf{C}$ o mulțime deschisă și fie $f \in A(U, X)$. Fie $\Delta \subset \bar{\Delta} \subset U$ o mulțime deschisă, relativ compactă, a cărei frontieră Γ este formată dintr-un sistem finit de curbe jordaniene rectificabile, care nu se intersectează două cîte două, pozitiv orientat. Atunci*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\xi - z)^{-1} f(\xi) d\xi = \begin{cases} f(z), & \text{dacă } z \in \Delta, \\ 0, & \text{dacă } z \notin \bar{\Delta}. \end{cases}$$

Demonstrație. Într-adevăr, dacă $x^* \in X^*$, atunci

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\xi - z)^{-1} x^*(f(\xi))\, d\xi = \begin{cases} x^*(f(z)), & \text{dacă } z \in \Delta, \\ 0, & \text{dacă } z \notin \bar{\Delta}, \end{cases}$$

în baza formulei lui Cauchy pentru cazul scalar (a se vedea [1], cap. III, § 2) și a lemei 1.2.4.2°. Din corolarul 1.1.7 deducem însă că

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\xi - z)^{-1}\, x^*(f(\xi))\, d\xi = x^*\left[\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\xi - z)^{-1} f(\xi)\, d\xi\right].$$

Funcționala x^* fiind arbitrară, egalitatea din enunț este o consecință simplă a observației 0.3.9.

Un alt rezultat clasic care se extinde la cazul vectorial (și de care vom avea nevoie în viitor) este *teorema lui Liouville*:

1.2.9. TEOREMĂ. *Fie $f \in A(\mathbf{C}, X)$. Dacă mulțimea valorilor funcției f este mărginită în spațiul X, atunci funcția f este constantă.*

Demonstrație. În virtutea ipotezei, funcția $x^* \circ f$ este mărginită pentru fiecare $x^* \in X^*$. În virtutea teoremei lui Liouville pentru funcții scalare (a se vedea [1], cap. II, § 3), $x^* \circ f$ este o funcție constantă. Dacă $f(z_1) \neq f(z_2)$ pentru o pereche de puncte z_1, z_2 din planul complex, atunci putem alege o funcțională $x^* \in X^*$ astfel încît $x^*(f(z_1) - f(z_2)) \neq 0$ (în baza observației 0.3.9), ceea ce contrazice faptul că $x^* \circ f$ este funcție constantă.

Să observăm, în continuare, că olomorfia se păstrează prin aplicații liniare și continue.

1.2.10. PROPOZIȚIE. *Fie $U \subset \mathbf{C}$ o mulțime deschisă, fie X, Y spații Banach și fie $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Pentru orice $f \in A(U, X)$ avem*

$$T \circ f \in A(U, Y).$$

Demonstrație. Fie, mai întîi, $\sum_{k\geq 0} w^k x_k$ o serie formală cu coeficienți în X, avînd raza de convergență nenulă. Atunci seria formală, $\sum_{k\geq 0} w^k Tx_k$ (cu coeficienți în Y) are raza de convergență nenulă. deoarece

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \|Tx_k\|^{1/k} \leqslant \overline{\lim_{k\to\infty}} \|x_k\|^{1/k} < \infty.$$

Dacă $f \in A(U, X)$, atunci funcția $T \circ f$ este suma unei serii formale convergente în vecinătatea fiecărui punct $z_0 \in U$, în baza observației de sus și a continuității operatorului T, deci $T \circ f \in A(U, Y)$.

În teoria spectrală a operatorilor un rol important este jucat de așanumitele funcții analitice la infinit.

1.2.11. DEFINIȚIE. Fie $\Omega \subset \mathbf{C}$ o mulțime deschisă de forma $\Omega = \mathbf{C} \setminus K$, unde $K \subset \mathbf{C}$ este o submulțime compactă. Fie $f \in A(\Omega, X)$. Vom spune că f este *analitică la infinit* dacă $\lim_{z\to\infty} f(z)$ există în X. Vom nota cu $A_\infty(\Omega, X)$ subspațiul liniar al funcțiilor din $A(\Omega, X)$ care sînt analitice la infinit. Mai notăm $f(\infty) = \lim_{z\to\infty} f(z)$.

1.2.12. LEMĂ. *Fie $U \subset \mathbf{C}$ o mulțime deschisă și fie $z_0 \in U$. Dacă $f \in A(U \setminus \{z_0\}, X)$ și dacă $\sup\{\|f(z)\| : z \in U \setminus \{z_0\}\} < \infty$, atunci f admite o extensie, notată tot cu f, astfel încît $f \in A(U, X)$.*

Demonstratie. Fie $r>0$ astfel încît $\{z\in\mathbf{C}:|z-z_0|\leqslant r\}\subset U$ şi fie $\rho>0$ cu $\rho<r$. Fie apoi $\Gamma_\rho=\partial\Delta_\rho$ şi $\Gamma_r=\partial\Delta_r$, unde $\Delta_r=\{z\in\mathbf{C}:|z-z_0|<r\}$, iar Δ_ρ este definită în mod asemănător. Dacă $z\in\Delta_r\setminus\bar{\Delta}_\rho$, din formula lui Cauchy obţinem că

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial(\Delta_r\setminus\bar{\Delta}_\rho)}(w-z)^{-1}f(w)\,dw=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_r}(w-z)^{-1}f(w)dw-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\rho}(w-z)^{-1}f(w)dw$$

(semnul minus apare deoarece luăm pe cercul Γ_ρ orientarea pozitivă). Să observăm că

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\rho}(w-z)^{-1}f(w)w=$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(z_0+\rho e^{i\theta}-z)^{-1}e^{i\theta}f(z_0+\rho e^{i\theta})\,d\theta=0$$

(în care am substituit $w=z_0+\rho e^{i\theta}$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$), deoarece funcţia care apare sub cea de-a doua integrală este mărginită (datorită ipotezei asupra funcţiei f). Aşadar, avem

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_r}(w-z)^{-1}f(w)dw,\quad z\in\Delta_r\setminus\{z_0\}.$$

Deoarece integrala din membrul drept al acestei egalităţi este o funcţie analitică şi în punctul z_0, rezultă de aici că însăşi funcţia f se poate prelungi ca funcţie analitică în mulţimea U.

1.2.13. COROLAR. *Fie* $\Omega=\mathbf{C}\setminus K$, *unde* $K\subset\mathbf{C}$ *este compactă, şi fie* $\lambda\in\Omega$. *Definim* $\Omega_0=\{(z-\lambda)^{-1}:z\in\Omega\}\cup\{0\}$. *Atunci avem* $f\in A_\infty(\Omega,X)$ *dacă şi numai dacă* $g\in A(\Omega_0,X)$, *unde* $g(w)=f(w^{-1}+\lambda)$, $w\in\Omega_0$.

Demonstraţie. Vom defini aplicaţia $\varphi:\mathbf{C}_\infty\to\mathbf{C}_\infty$, unde $\varphi(z)=w=(z-\lambda)^{-1}$, cu $\varphi(\infty)=0$ şi $\varphi(\lambda)=\infty$. Deoarece $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)$ există dacă şi numai dacă $\lim\limits_{w\to 0}g(w)$ există, afirmaţia rezultă pe baza lemei precedente. Mulţimea Ω_0 este deschisă fiindcă $\Omega_0=\varphi(\Omega\cup\{\infty\})$ şi φ este omeomorfism.

1.2.14. DEFINIŢIE. Fie $\Delta\subset\mathbf{C}$ o mulţime deschisă, cu proprietatea că $\mathbf{C}\setminus\Delta$ este compactă în $\mathbf{C}$. Să presupunem că frontiera Γ a mulţimii Δ este formată dintr-un sistem finit de curbe jordaniene rectificabile, care nu se intersectează două cîte două. Sistemul Γ este atunci şi frontiera mulţimii deschise $\Delta_c=\mathbf{C}\setminus\bar{\Delta}$, care este relativ compactă. Vom spune că Γ este un sistem de curbe jordaniene rectificabile *pozitiv orientat* (*în raport cu* Δ) dacă

Γ este negativ orientat în raport cu Δ_c (adică fiecare curbă din sistemul Γ este parcursă în sens invers față de cel considerat la orientarea pozitivă).

Sîntem acum în măsură să demonstrăm *formula Cauchy la infinit.*

1.2.15. TEOREMĂ. *Fie* Ω *complementarea unei mulțimi compacte din* $\mathbf{C}$. *Dacă* $\Delta \subset \bar{\Delta} \subset \Omega$ *este complementarea unei mulțimi compacte din* $\mathbf{C}$ *și* $\Gamma = \partial\Delta$ *este un sistem finit de curbe jordaniene rectificabile care nu se intersectează două cîte două, pozitiv orientat, atunci avem reprezentarea*

$$f(\infty) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(w - z)^{-1} f(w)\, dw = \begin{cases} f(z), & \text{dacă } z \in \Delta, \\ 0, & \text{dacă } z \notin \bar{\Delta}, \end{cases}$$

oricare ar fi $f \in A_\infty(\Omega, X)$.

Demonstrație. Deoarece $\Gamma = \partial\Delta \neq \emptyset$, avem $\Delta_c = \mathbf{C}\setminus\bar{\Delta} \neq \emptyset$, deci putem fixa un punct $\lambda \in \Delta_c$. Vom considera apoi funcția $\varphi : \mathbf{C}_\infty \to \mathbf{C}_\infty$ definită ca în corolarul 1.2.13. Vom nota $\Delta_0 = \varphi(\Delta)$ și $\Gamma_0 = \varphi(\Gamma)$. Este limpede că Δ_0 este o mulțime deschisă, relativ compactă în $\mathbf{C}$ și că Γ_0 este frontiera sa, formată dintr-un sistem finit de curbe jordaniene rectificabile. Să remarcăm că Γ_0 este pozitiv orientată în raport cu Δ_0. Într-adevăr, transformarea φ nu schimbă orientarea acelor curbe din sistemul Γ care nu conțin punctul λ în „interiorul" lor și modifică orientarea acelor curbe din Γ care conțin pe λ în „interior". Din modul în care a fost definită orientarea pe Γ, rezultă că orientarea pe Γ_0 (în raport cu Δ_0) este pozitivă.

Fie funcția $g(w) = f(\varphi^{-1}(w))$, analitică într-o vecinătate a mulțimii Δ_0. Dacă $\xi \in \Gamma$, notăm cu $\eta = \varphi(\xi) \in \Gamma_0$. Pe baza formulei de schimbare de variabilă (exercițiul 1.7.8) avem următoarele egalități:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(\xi - z)^{-1} f(\xi)\, d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0}(\eta^{-1} + \lambda - z)^{-1} g(\eta)(-\eta^{-2})\, d\eta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0}(-\eta^{-1} + (\eta - w)^{-1})\, g(\eta)\, d\eta.$$

Dacă $z \in \Delta$, atunci $w = \varphi(z) \in \Delta_0$ și deci, pe baza formulei lui Cauchy, ultima integrală este egală cu $g(w) - g(0) = f(z) - f(\infty)$ (să remarcăm că punctul 0 se află în Δ_0). Dacă $z \notin \bar{\Delta}$, atunci $w \notin \bar{\Delta}_0$; prin urmare, ultima integrală va fi, în acest caz, egală cu $-g(0) = -f(\infty)$, ceea ce încheie demonstrația.

1.3. CALCULUL FUNCȚIONAL ANALITIC ÎN ALGEBRE BANACH

În cele ce urmează vom nota cu B o algebră Banach cu unitate, nu neapărat comutativă, în care presupunem că $\|1\| = 1$ (observația 0.5.3).

1.3.1. DEFINIȚII. Fie $a \in B$ un element fixat și fie $\sigma_B(a)$ spectrul său (definițiile 0.5.4). Complementarea spectrului $\rho_B(a) = \mathbf{C} \setminus \sigma_B(a)$ se numește *mulțimea rezolvată* a elementului a în B.

Aplicația

$$\rho_B(a) \ni z \to (z - a)^{-1} \in B$$

se numește *funcția rezolvată* a lui a în B (sau simplu *rezolvanta* lui a în B).

Relația

$$(z - a)^{-1} - (w - a)^{-1} = (w - z)\,(z - a)^{-1}(w - a)^{-1}$$

valabilă pentru orice pereche de puncte z, $w \in \rho_B(a)$ se numește *ecuația rezolvantă* a elementului a în B. (Verificarea valabilității ecuației rezolvante este un exercițiu simplu.)

Reamintim că pentru un element $a \in B$ notăm cu $r(a)$ raza sa spectrală (definițiile 0.5.4).

1.3.2. LEMĂ. *Pentru fiecare element $a \in B$ au loc afirmațiile*:

(i) *Dacă* $z_0 \in \rho_B(a)$ *și dacă* $z \in \mathbf{C}$ *satisface estimarea* $|z - z_0| < \|(z_0 - a)^{-1}\|^{-1}$, *atunci seria*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z - z_0)^k (z_0 - a)^{-k-1}$$

este convergentă în B și definește inversul elementului $z - a$.

(ii) *Dacă* $z \in \mathbf{C}$ *satisface estimarea* $|z| > r(a)$, *atunci seria*

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k-1} a^k$$

este convergentă în B și definește inversul elementului $z - a$.

Demonstrație. (i) Să remarcăm că

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} \|(z_0 - a)^{-k-1}\|^{1/k} \leqslant \|(z_0 - a)^{-1}\|.$$

În baza lemei 1.2.2, dacă $|z - z_0| < \|(z_0 - a)^{-1}\|^{-1}$, atunci avem convergența dorită (care rezultă, de altfel, și prin estimarea directă a seriei). Avem apoi

$$(z - a) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z - z_0)^k (z_0 - a)^{-k-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z - z_0)^{k+1} (z_0 - a)^{-k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z - z_0)^k (z_0 - a)^{-k} = 1.$$

Un calcul similar, cu $z - a$ la dreapta, ne arată că seria din enunț este inversul elementului $z - a$.

(ii) Seria formală $\sum_{k \geqslant 0} w^{k+1} a^k$ este convergentă pentru $|w| < r(a)^{-1}$, în baza lemei 1.2.2. Așadar, seria $\sum_{k \geqslant 0} z^{-k-1} a^k$ este convergentă pentru $|z| > r(a)$.

Un calcul asemănător cu cel de la (i), pe care-l lăsăm pe seama cititorului ca exerciţiu, ne arată că această ultimă serie defineşte inversul elementului $z - a$.

1.3.3. TEOREMĂ. *Pentru fiecare element $a \in B$ mulţimea $\sigma_B(a)$ este o parte compactă şi nevidă a planului complex.*

Demonstraţie. Din lema 1.3.2 rezultă că mulţimea $\rho_B(a)$ este deschisă şi conţine submulţimea $\{z \in \mathbf{C} : |z| > r(a)\}$; prin urmare, spectrul $\sigma_B(a)$ este o sumbmulţime închisă şi mărginită în plan.

Să demonstrăm că $\sigma_B(a) \neq \emptyset$. Pentru aceasta vom remarca mai întîi că funcţia $z \to (z - a)^{-1}$ este analitică în $\rho_B(a)$. În plus, $\lim_{z\to\infty}(z-a)^{-1} = 0$, ceea ce rezultă din partea a doua a lemei 1.3.2. Dacă $\sigma_B(a) = \emptyset$, funcţia $z \to (z - a)^{-1}$ fiind deci mărginită în întreg planul complex, trebuie să fie constantă, în virtutea teoremei 1.2.9 ; mai mult decît atît, este clar că valoarea acestei constante trebuie să fie zero. Cu alte cuvinte, obţinem $(z - a)^{-1} = 0$ pentru orice $z \in \mathbf{C}$, deci $1 = 0$, ceea ce este absurd.

1.3.4. OBSERVAŢII. 1° Fie $\mathscr{P}$ mulţimea polinoamelor complexe de o singură variabilă. Aşadar, $P \in \mathscr{P}$ are forma $P(z) = \lambda_0 z^n + \lambda_1 z^{n-1} + \ldots + \lambda_n$, unde $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{C}$. Vom nota

$$P(a) = \lambda_0 a^n + \lambda_1 a^{n-1} + \ldots + \lambda_n \in B,$$

unde $a \in B$ este un element fixat. Obţinem în felul acesta o aplicaţie

$$\mathscr{P} \ni P \to P(a) \in B \tag{1.3.1}$$

care este omomorfism de algebre cu unitate. Cu alte cuvinte

$$(\alpha P + \beta Q)(a) = \alpha P(a) + \beta Q(a), \quad (PQ)(a) = P(a)Q(a), \quad P_1(a) = 1,$$

pentru orice $P, Q \in \mathscr{P}$ şi $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$, unde $P_1(z) = 1$. În plus, $\zeta(a) = a$, unde ζ este polinomul $\zeta(z) = z$.

2° Apare următoarea problemă naturală : se poate extinde aplicaţia (1.3.1) la clase mai largi de funcţii ?

Familia $\mathscr{R}$ a tuturor expresiilor raţionale este prea largă. Într-adevăr, dacă $z_0 \in \sigma_B(a)$ şi $R(z) = (z_0 - z)^{-1}$, nu putem da un sens expresiei $R(a)$ în cadrul algebrei B. Sîntem obligaţi să ne limităm la familia $\mathscr{R}_a$ formată din expresii raţionale P/Q, unde $P, Q \in \mathscr{P}$, şi zerourile lui Q sînt situate în afara mulţimii $\sigma_B(a)$. Deci $\mathscr{R}_a$ este o algebră cu unitate. Dacă $R \in \mathscr{R}_a$, $R(z) = P(z)/Q(z)$ şi Q nu este constant, putem presupune că avem

$$Q(z) = z^m + \mu_1 z^{m-1} + \ldots + \mu_m = (z - z_1) \ldots (z - z_m),$$

unde $z_1, \ldots, z_m$ sînt rădăcinile (nu neapărat distincte) ale lui Q, situate în afara mulţimii $\sigma_B(a)$. Putem defini

$$Q(a)^{-1} = (a - z_1)^{-1} \ldots (a - z_m)^{-1},$$

şi $R(a) = P(a)Q(a)^{-1}$. Atunci aplicaţia

$$\mathscr{R}_a \ni R \to R(a) \in B \tag{1.3.2}$$

este corect definită (nu depinde de scrierea lui R ca P/Q) și reprezintă un omomorfism de algebre cu unitate, care extinde omomorfismul (1.3.1). Să remarcăm relația

$$a(a-z)^{-1} = (a-z)^{-1}(a-z)a(a-z)^{-1} = (a-z)^{-1}a$$

pentru orice $z \in \rho_B(a)$, ceea ce arată comutativitatea tuturor expresiilor care apar în construcția de mai sus.

1.3.5. DEFINIȚIE. Fie $a \in B$ un element fixat. Vom nota cu $\mathscr{A}_a$ familia funcțiilor $f : U_f \to \mathbf{C}$ care sînt analitice într-o mulțime deschisă $U_f \supset \sigma_B(a)$ (mulțimea U_f depinzînd de funcția f).

Evident, $\mathscr{A}_a \supset \mathscr{R}_a$. [Dacă $R \in \mathscr{R}_a$, atunci cu notația de mai sus, $R : U_R \to \mathbf{C}$, unde $U_R = \mathbf{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_m\} \supset \sigma_B(a)$].

Familia de funcții $\mathscr{A}_a$ va fi cea mai largă clasă de funcții f pentru care vom da sens expresiei $f(a)$, oricare ar fi elementul $a \in B$.

1.3.6. DEFINIȚIE. Fie K și U mulțimi situate în planul complex, K o mulțime compactă, U o mulțime deschsă, $K \subset U$. Fie $\Gamma = \partial\Delta$ un sistem finit de curbe jordaniene rectificabile, care nu se intersectează două cîte două, pozitiv orientat în raport cu Δ, unde $K \subset \Delta \subset \overline{\Delta} \subset U$. Sistemul Γ se va numi *contur admisibil ce înconjoară pe* K în U.

1.3.7. OBSERVAȚIE. Din motive geometrice simple, pentru orice pereche de mulțimi K și U ca în definiția 1.3.6 se poate alege un contur admisibil ce înconjoară pe K în U. Într-adevăr, mulțimile K și $\mathbf{C} \setminus U$ aflîndu-se la distanță pozitivă d una de celaltă, putem lua o acoperire a mulțimii K formată din discuri de rază $< d$. Extrăgînd o acoperire finită, vom obține o mulțime deschisă Δ' care este reuniune finită de discuri, conține pe K și a cărei frontieră este un sistem finit de curbe netede pe porțiuni (căci sînt reuniuni finite de arce de cercuri). Dacă printre punctele mulțimii $\Gamma' = \partial\Delta'$ se află și puncte duble, acestea pot fi înălturate prin modificări simple, făcute într-o vecinătate aflată în afara mulțimii K a fiecărui asemenea punct. În acest mod se poate obține un sistem finit Γ de curbe jordaniene, netede pe porțiuni (sau chiar netede, prin practicarea unui alt număr finit de modificări) formînd un contuar admisibil ce înconjoară pe K în U.

1.3.8. DEFINIȚIE. Fie $a \in B$, fie $f \in \mathscr{A}_a$, $f : U_f \to \mathbf{C}$ și fie Γ un contur admisibil ce înconjoară pe $\sigma_B(a)$ în U_f. Vom defini integrala

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z)\,(z-a)^{-1}\,dz. \tag{1.3.3}$$

Existența acestei integrale este asigurată de faptul că funcția $z \to f(z)\,(z-a)^{-1}$ este analitică (deci continuă) în mulțimea $U_f \setminus \sigma_B(a) \supset \Gamma$.

1.3.9. LEMĂ. *Integrala* (1.3.3) *satisface estimarea*

$$\|f(a)\| \leqslant M \sup_{z \in \Delta} |f(z)|,$$

unde $M \geqslant 0$ este o constantă ce nu depinde de f, iar Δ este mulțimea deschisă, relativ compactă, a cărei frontieră este Γ.

Demonstrație. Afirmația este o consecință directă a proprietiei 1.1.5. Putem lua

$$M = (2\pi)^{-1} v(\Gamma) \sup_{z \in \Gamma} \|(z - a)^{-1}\|,$$

unde $v(\Gamma)$ este variația măsurii Lebesgue-Stieltjes în raport cu care se face integrarea pe Γ (egală de fapt cu suma lungimilor curbelor care alcătuiesc sistemul Γ).

1.3.10. LEMĂ. *Elementul $f(a)$ dat de integrala* (1.3.3) *nu depinde de conturul admisibil* Γ.

Demonstrație. Fie Γ_1 și Γ_2 două contururi admisibile ce înconjoară pe $\sigma_B(a)$ în U_f. Avem $\Gamma_1 = \partial\Delta_1$ și $\Gamma_2 = \partial\Delta_2$. Vom alege apoi un contur admisibil $\Gamma = \partial\Delta$ ce înconjoară $\sigma_B(a)$ în $\Delta_1 \cap \Delta_2$. Deoarece aplicația $z \to f(z)(z - a)^{-1}$ este analitică într-o vecinătate a mulțimii $\bar{\Delta}_1 \setminus \Delta$, pe baza formulei lui Cauchy deducem că

$$\int_{\partial(\bar{\Delta}_1 \setminus \Delta)} f(z)\,(z - a)^{-1}\,dz = 0 = \int_{\Gamma_1} f(z)(z - a)^{-1}\,dz - \int_{\Gamma} f(z)\,(z - a)^{-1}\,dz,$$

deoarece $\partial(\bar{\Delta}_1 \setminus \Delta) = \Gamma_1 \cup (-\Gamma)$, unde $-\Gamma$ este Γ cu orientarea opusă. Analog,

$$\int_{\Gamma_2} f(z)\,(z - a)^{-1}\,dz = \int_{\Gamma} f(z)\,(z - a)^{-1}\,dz,$$

adică independența dorită.

1.3.11. OBSERVAȚIE. Familia $\mathscr{A}_a$ (dată de definiția 1.3.5) nu este o algebră de funcții deoarece elementele sale nu au un domeniu comun de definiție. Putem însă defini operațiile

$$\begin{aligned} (f_1 + f_2)(z) &= f_1(z) + f_2(z), && z \in U \cap U \\ (f_1 f_2)(z) &= f_1(z) f_2(z), && z \in U_{f_1} \cap U_{f_2}; \\ (\lambda f)(z) &= \lambda f(z), && z \in U_f, \end{aligned}$$

pentru f, f_1, f_2 în $\mathscr{A}_a$ și $\lambda \in \mathbf{C}$.

Vom introduce în mulțimea $\mathscr{A}_a$ o relație de echivalență. Anume, vom spune că f_1 este *echivalentă* cu f_2 dacă există o mulțime deschisă $U \subset U_{f_1} \cap U_{f_2}$, $U \supset \sigma_B(a)$, astfel încît $f_1(z) = f_2(z)$ pentru orice $z \in U$. Pentru fiecare element $f \in \mathscr{A}_a$ vom nota cu $[f]$ clasa sa de echivalență. Notăm de asemenea cu $[\mathscr{A}_a]$ mulțimea acestor clase de echivalență. Mulțimea $[\mathscr{A}_a]$ devine algebră cu unitate, dotată cu operațiile

$$[f_1] + [f_2] = [f_1 + f_2], \quad [f_1][f_2] = [f_1 f_2], \quad \lambda[f] = [\lambda f],$$

oricare ar fi f_1, f_2, f în $\mathscr{A}_a$ și $\lambda \in \mathbf{C}$. Unitatea acestei algebre este desigur clasa funcției $f_1 \equiv 1$ (exercițiul 1.7.10).

Vom introduce acum în algebra $[\mathscr{A}_a]$ un concept de convergență. Anume, vom spune că un șir $\{\varphi_k\}_k \subset [\mathscr{A}_a]$ este *convergent* către un element $\varphi \in [\mathscr{A}_a]$ dacă există o mulțime deschisă $U \supset \sigma_B(a)$ astfel încît $\varphi_k = [f_k]$, $U \subset U_{f_k}$ pentru orice k, $\varphi = [f]$, $U \subset U_f$ și

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{z\in K} |f_k(z) - f(z)| = 0$$

pentru fiecare submulțime compactă $K \subset U$.

Vom spune că o aplicație liniară $J : [\mathscr{A}_a] \to Y$ (Y fiind spațiu Banach) este *continuă* dacă pentru orice șir $\{\varphi_k\}_k \subset [\mathscr{A}_a]$ convergent către $\varphi \in [\mathscr{A}_a]$ avem $J(\varphi_k) \to J(\varphi)$ $(k \to \infty)$ în Y.

Să mai remarcăm că aplicația $\mathscr{R}_a \to [\mathscr{A}_a]$ care asociază fiecărei expresii raționale $R \in \mathscr{R}_a$ clasa sa în $[\mathscr{A}_a]$ este injectivă, deoarece fiecare expresie R definește o funcție analitică într-o mulțime conexă din plan. Așadar, $\mathscr{R}_a$ se poate identifica cu o subalgebră a algebrei $[\mathscr{A}_a]$.

În baza lemei 1.3.10, aplicația

$$[\mathscr{A}_a] \ni [f] \to [f](a) = f(a) \in B \tag{1.3.4}$$

este corect definită. Proprietățile ei sînt descrise de rezultatul care urmează.

1.3.12. TEOREMĂ. *Fie $a \in B$ un element fixat. Atunci aplicația* (1.3.4) *este un omomorfism continuu de algebre cu unitate, care extinde omomorfismul* (1.3.2).

Demonstrație. Vom obține acest rezultat în mai multe etape.

1° Liniaritatea aplicației (1.3.4) este ușor de demonstrat. Într-adevăr, dacă $f_1, f_2 \in \mathscr{A}_a$ și $\lambda_1, \lambda_2, \in \mathbf{C}$, atunci putem scrie

$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda_1 f_1(z) + \lambda_2 f_2(z))(z-a)^{-1}\,dz =$$

$$= \lambda_1 f_1(a) + \lambda_2 f_2(a),$$

unde Γ este un contur admisibil ce înconjoară $\sigma_B(a)$ în $U_{f_1} \cap U_{f_2}$. De aici obținem egalitatea

$$[\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2](a) = \lambda_1 [f_1](a) + \lambda_2 [f_2](a),$$

adică liniaritatea dorită.

2° Vom demonstra acum multiplicativitatea aplicației (1.3.4). Fie, mai întîi, $f_1, f_2 \in \mathscr{A}_a$. Alegem mulțimile $\Delta_1 \subset \bar{\Delta}_1 \subset \Delta_2 \subset \bar{\Delta}_2 \subset U_{f_1} \cap U_{f_2}$ astfel încît $\Gamma_j = \partial\Delta_j$ $(j = 1, 2)$ să fie contururi admisibile ce înconjoară $\sigma_B(a)$. Atunci putem scrie că

$$f_1(a)f_2(a) = -\frac{1}{4\pi^2}\left(\int_{\Gamma_1} f_1(z)(z-a)^{-1}\,dz\right)\left(\int_{\Gamma_2} f_2(w)(w-a)^{-1}\,dw\right) =$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma_1}\left(\int_{\Gamma_2} f_1(z)\,f_2(w)(z-a)^{-1}(w-a)^{-1}\,dw\right)dz =$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma_1}\left(\int_{\Gamma_2} f_1(z)\, f_2(w)\,(w-z)^{-1}\,((z-a)^{-1}-(w-a)^{-1})\,\mathrm{d}w\right)\mathrm{d}z =$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma_1} f_1(z)\,(z-a)^{-1}\left(\int_{\Gamma_2} f_2(w)\,(w-z)^{-1}\,\mathrm{d}w\right)\mathrm{d}z +$$

$$+\frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma_1}\left(\int_{\Gamma_2} f_1(z) f_2(w)\,(w-z)^{-1}\,(w-a)^{-1}\,\mathrm{d}w\right)\mathrm{d}z =$$

$$= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma_1} f_1(z)\, f_2(z)\,(z-a)^{-1}\mathrm{d}z +$$

$$+\frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma_2} f_2(w)\,(w-a)^{-1}\left(\int_{\Gamma_1} f_1(z)\,(w-z)^{-1}\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}w = (f_1 f_2)(a),$$

în care am utilizat ecuația rezolvată (definițiile 1.3.1), o variantă vectorială a teoremei lui Fubini (a se vedea exercițiul 0.6.24 și observația 1.1.8.2⁰) și egalitatea

$$\int_{\Gamma_1} f_1(z)\,(w-z)^{-1}\,\mathrm{d}z = 0$$

dată de formula lui Cauchy (avem $w \in \Gamma_2$, deci $w \notin \overline{\Delta}_1$). De aici rezultă

$$[f_1 f_2](a) = [f_1](a)\,[f_2](a);$$

prin urmare, aplicația (1.3.4) este multiplicativă.

3⁰ Vom obține acum continuitatea aplicației (1.3.4) (în sensul observației 1.3.11). Fie deci $U \supset \sigma_B(a)$ o mulțime deschisă și fie $\{f_k\}_k \subset \mathscr{A}_a$ un șir cu proprietatea că $U \subset U_{f_k}$ și

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{z\in K} |f_k(z) - f(z)| = 0,$$

unde $f \in \mathscr{A}_a$, $U_f \supset U$, iar $K \subset U$ este o mulțime compactă arbitrară. Dacă Γ este un contur admisibil ce înconjoară $\sigma_B(a)$ în U, $\Gamma = \partial\Delta$, în baza lemei 1.3.9 putem scrie că

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k(a) - f(a)\|' \leqslant \lim_{k\to\infty} M \sup_{z\in\Delta} |f_k(z) - f(z)| = 0,$$

deci continuitatea dorită.

4⁰ Fie $P(z) = \lambda_0 z^n + \lambda_1 z^{n-1} + \ldots + \lambda_n$ un polinom arbitrar. Vom demonstra că

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma} P(z)\,(z-a)^{-1}\mathrm{d}z = \lambda_0 a^n + \lambda_1 a^{n-1} + \ldots + \lambda_n,$$

unde Γ este un contur admisibil ce înconjoară mulțimea $\sigma_B(a)$ în $\mathbb{C}$.

Vom utiliza lema 1.3.2 (ii). Fie $r > r(a)$. Atunci

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} z^n (z-a)^{-1}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} z^n (z-a)^{-1}\,dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} z^n \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k-1} a^k\right) dz = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} z^{n-k-1}dz\right) a^k = a^n$$

pentru orice $n \geqslant 0$, unde am utilizat convergența uniformă a seriei $\sum_{k\geqslant 0} z^{-k-1}a^k$ pe $\{|z|=r\}$, ca și egalitatea

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} z^p\,dz = \begin{cases} 0, \text{ dacă } p \neq -1, \\ 1, \text{ dacă } p = -1. \end{cases}$$

Așadar

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} (\lambda_0 z^n + \ldots + \lambda_n)(z-a)^{-1}\,dz = \lambda_0 a^n + \lambda_1 a^{n-1} + \ldots + \lambda_n,$$

în virtutea relațiilor obținute mai înainte.

5° Fie $z_0 \in \rho_B(a)$. Considerăm expresia rațională $R_1(z) = (z-z_0)^{-1}$. Vom arăta că $R_0(a) = (a-z_0)^{-1}$. Într-adevăr, notînd $P_0(z) = z - z_0$, pe baza identității $P_0R_0 \equiv 1$ și a celor demonstrate la punctele 2° și 4° obținem $(P_0R_0)(a) = P_0(a)R_0(a) = R_0(a)P_0(a) = 1$; deoarece $P_0(a) = a - z_0$, din unicitatea inversului deducem că $R_0(a) = (a-z_0)^{-1}$.

6° Mai general, dacă $z_1, \ldots, z_m$ sînt numere complexe situate în afara mulțimii $\sigma_B(a)$, și dacă $R_j(z) = (z-z_j)^{-1}$ $(j = 1, \ldots, m)$, pe baza punctului 2° deducem că

$$(R_1 \ldots R_m)(a) = R_1(a) \ldots R_m(a) = (a-z_1)^{-1} \ldots (a-z_m)^{-1}.$$

utilizînd observația precedentă.

7° În sfîrșit, dacă $R = P/Q \in \mathscr{R}_a$, rezultatele stablite pînă acum ne arată că $R(a)$ avînd sensul din observația 1.3.4.2° coincide cu $R(a)$ obținut prin formula (1.3.3); prin urmare, aplicația (1.3.4) extinde aplicația (1.3.2), ceea ce încheie demonstrația teoremei.

Aplicația liniară, multiplicativa și continua (1.3.4) va fi desemnată în continuare sub numele de *calcul funcțional analitic*. În capitolele următoare vom mai întîlni și alte tipuri de calcule funcționale, construite în condiții mai speciale.

1.4. PROPRIETĂȚI ALE CALCULULUI FUNCȚIONAL ANALITIC

Continuăm studiul calculului funcțional analitic definit în secțiunea precedentă. Fie B o algebră Banach cu unitate și fie $a \in B$. În practică nu vom folosi omomorfismul (1.3.4) ci direct integrala (1.3.3), mult mai co-

modă în aplicații. Un prim rezultat important legat de calculul funcțional analitic este *teorema aplicației spectrului.*

1.4.1. TEOREMĂ. *Pentru orice* $a \in B$ *și* $f \in \mathscr{A}_a$ *are loc egalitatea*

$$\sigma_B(f(a)) = f(\sigma_B(a)).$$

Demonstrație. Vom alege, mai întîi, un punct $w \notin f(\sigma_B(a))$. Atunci funcția $z \to (w - f(z))^{-1}$ este definită într-o vecinătate a mulțimii $\sigma_B(a)$, prin urmare, are sens elementul $(w - f)^{-1}(a) \in B$. În baza multiplicativității calculului funcțional analitic și a comutativității valorilor sale, vom putea scrie

$$(w - f(a))(w - f)^{-1}(a) = ((w - f)(w - f)^{-1})(a) = 1 = (w - f)^{-1}(a)(w - f(a)),$$

ceea ce ne arată că $(w - f)^{-1}(a) = (w - f(a))^{-1}$. Așadar, $w \notin \sigma_B(f(a))$. Punctul w fiind arbitrar, deducem că $\sigma_B(f(a)) \subset f(\sigma_B(a))$.

Invers, fie $w \notin \sigma_B(f(a))$. Să admitem că avem $w = f(z_0)$, unde $z_0 \in \sigma_B(a)$. În virtutea analiticității funcției f în z_0 avem reprezentarea $f(z_0) - f(z) = (z_0 - z)g(z)$, unde $g \in \mathscr{A}_a$. Atunci $f(z_0) - f(a) = (z_0 - a)g(a)$, deci $g(a)(f(z_0) - f(a))^{-1}$ este inversul elementului $z_0 - a$, ceea ce este absurd deoarece $z_0 \in \sigma_B(a)$. Așadar, $w \notin f(\sigma_B(a))$, ceea ce ne arată că și incluziunea inversă $f(\sigma_B(a)) \subset \sigma_B(f(a))$ este adevărată.

Un alt rezultat remarcabil este *teorema de compunere a calculului funcțional analitic*:

1.4.2. TEOREMĂ. *Fie* $f \in \mathscr{A}_a$ *și fie* $g \in \mathscr{A}_{f(a)}$. *Atunci* $g \circ f \in \mathscr{A}_a$ *și are loc egalitatea* $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

Demonstrație. În baza teoremei precedente avem $\sigma_B(f(a)) = f(\sigma_B(a))$. Dacă U_f și U_g sînt domeniile de definiție ale funcțiilor f și respectiv g, deoarece $U_g \supset \sigma_B(f(a))$, atunci $U_f \supset f^{-1}(U_g) \supset \sigma_B(a)$, ceea ce arată că funcția $g \circ f$, definită în mulțimea $f^{-1}(U_g)$, este în $\mathscr{A}_a$.

Fie $\Gamma_1 = \partial\Delta_1$ un contur admisibil ce înconjoară $\sigma_B(f(a))$ în U_g. Atunci $f^{-1}(\Delta_1) \supset \sigma_B(a)$ și putem alege mulțimea $\Delta \supset \sigma_B(a)$ astfel încît $\Gamma = \partial\Delta$ să fie un contur admisibil ce înconjoară $\sigma_B(a)$ în $f^{-1}(\Delta_1)$. Să remarcăm următoarele egalități:

$$g(f(a)) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} g(w)(w - f(a))^{-1}\,dw =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} g(w)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(w - f(z))^{-1}(z - a)^{-1}\,dz\right)dw =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} g(w)(w - f(z))^{-1}\,dw\right)(z - a)^{-1}\,dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(g \circ f)(z)(z - a)^{-1}\,dz = (g \circ f)(a),$$

în baza formulei lui Cauchy, deoarece $f(\Gamma) \subset \Delta_1$, prin construcție.

Pentru funcțiile analitice întregi, ca și pentru polinoame, calculul funcțional analitic revine la simpla înlocuire a variabilei.

1.4.3. PROPOZIȚIE. *Fie* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k z^k$ *o funcție (scalară) analitică întreagă. Atunci* $f(a) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k a^k$, *în care seria din membrul drept converge absolut în topologia algebrei Banach* B.

Demonstrație. Fie $r > r(a)$ (definițiile 0.5.4). Folosind un argument din demonstrația lemei 1.2.2, deducem că există un număr $M \geqslant 1$ astfel încît $\| a^k \| \leqslant M r^k$ pentru orice $k = 0, 1, 2, \ldots$ Fie acum $\varepsilon > 0$ astfel încît $\varepsilon r < 1$. Deoarece raza de convergență a seriei $f(z)$ este infinită, avem $\overline{\lim_{k \to \infty}} \, | \lambda_k |^{1/k} = 0$. Același argument ne asigură că există un număr $M_1 \geqslant 1$ astfel încît $| \lambda_k | \leqslant M_1 \varepsilon^k$ oricare ar fi k. Atunci putem scrie că

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k a^k \right\| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} M M_1 \varepsilon^k r^k = M M_1 (1 - \varepsilon r)^{-1},$$

deci seria este absolut convergentă în topologia lui B.

Să remarcăm apoi că avem

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} f(z) (z - a)^{-1} \, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k z^k \right) (z - a)^{-1} \, dz =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} z^k (z - a)^{-1} \, dz \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k a^k,$$

în care permutarea seriei cu integrala este posibilă datorită convergenței uniforme a seriei pe domeniul de integrare.

1.4.4. EXEMPLU. Funcția exponențială $f(z) = e^z = \sum_{k=0}^{\infty} (k!)^{-1} z^k$ este o funcție analitică întreagă, căreia îi putem aplica propoziția precedentă. Dacă $a \in B$, atunci vom nota $f(a) = e^a$ și avem egalitatea

$$e^a = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!},$$

iar seria din membrul drept converge absolut în B.

1.4.5. PROPOZIȚIE. *Fie* B_1, B_2 *algebre Banach cu unitate și fie* $\varphi : B_1 \to B_2$ *un omomorfism continuu. Atunci* $\sigma_{B_2}(\varphi(a)) \subset \sigma_{B_1}(a)$ *și* $\varphi(f(a)) = f(\varphi(a))$, *oricare ar fi* $a \in B_1$ *și* $f \in \mathscr{A}_a$.

Demonstrație. Dacă $z \notin \sigma_{B_1}(a)$, atunci din relația

$$\varphi((z - a)(z - a)^{-1} = (z - \varphi(a)) \, \varphi((z - a)^{-1}) = 1 = \varphi((z - a)^{-1}) (z - \varphi(a))$$

deducem că $z \notin \sigma_{B_2}(\varphi(a))$ și că $\varphi((z-a)^{-1}) = (z - \varphi(a))^{-1}$. Așadar

$$\sigma_{B_2}(\varphi(a)) \subset \sigma_{B_1}(a).$$

Fie acum $f \in \mathscr{A}_a$ cu domeniul de definiție U_f. Dacă Γ este un contur admisibil ce înconjoară mulțimea $\sigma_{B_1}(a)$ în U_f atunci avem, în virtutea corolarului 1.1.7 și a celor arătate mai sus, că

$$\varphi(f(a)) = \varphi\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)(z-a)^{-1}dz\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)(z - \varphi(a))^{-1}\,dz = f(\varphi(a)).$$

1.5. TEOREMA DE EXISTENȚĂ A IDEMPOTENȚILOR

Una din cele mai importante aplicații ale calculului funcțional analitic este demonstrarea existenței idempotenților corespunzînd părților separate ale spectrului unui element dat, care va fi prezentată în această secțiune, rezultat datorat lui Riesz.

1.5.1. DEFINIȚIE. Un element p al unei algebre Banach se numește *idempotent* (sau *proiector*) dacă $p^2 = p$.

Deoarece expunerile noastre au ca scop principal studiul unor proprietăți ale operatorilor liniari, vom demonstra rezultatul de bază al acestui paragraf în algebra Banach $\mathscr{L}(X)$, unde X este un spațiu Banach fixat. Deoarece $\mathscr{L}(X)$ este algebră Banach cu unitate (exemplul 0.5.2.4°), putem vorbi de *spectrul* unui operator $T \in \mathscr{L}(X)$, adică despre mulțimea $\sigma_{\mathscr{L}(X)}(T)$. Există un alt mod de a introduce spectrul unui operator, care nu implică algebra $\mathscr{L}(X)$ ci numai acțiunea operatorului pe spațiul X. Anume putem considera mulțimea

$$\sigma(T, X) = \{z \in \mathbf{C} : z - T \text{ nu este bijectiv pe } X\}. \qquad (1.5.1)$$

În baza teoremei graficului închis (teorema 0.3.3), dacă $z - T$ este bijectiv, atunci $(z - T)^{-1} \in \mathscr{L}(X)$; prin urmare, avem egalitatea $\sigma(T, X) = \sigma_{\mathscr{L}(X)}(T)$. Vom prefera notația (1.5.1) pentru a desemna spectrul operatorului T [și definiția echivalentă dată de (1.5.1)].

1.5.2. TEOREMĂ. *Fie $T \in \mathscr{L}(X)$ un operator cu proprietatea că $\sigma(T, X) = K_1 \cup K_2$ unde K_1 și K_2 sînt compacte, disjuncte și nevide. Atunci există subspațiile liniare, închise, nenule X_1, X_2 ale lui X cu următoarele proprietăți*:

1° $X = X_1 + X_2$ *și* $X_1 \cap X_2 = \{0\}$;

2° $T(X_j) \subset X_j$ *și* $\sigma(T, X_j) = K_j$, $j = 1, 2$.

Demonstrație. Fie $U_j \supset K_j$ mulțimi deschise astfel încît $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Fie χ_1 funcția caracteristică a mulțimii U_1 în mulțimea $U_1 \cup U_2 \supset \sigma(T, X)$. Atunci $\chi_1 \in \mathscr{A}_T$, deci elementul $P_1 = \chi_1(T)$ are sens. Deoarece

$\chi_1^2 = \chi_1$, avem și $P_1^2 = P_1$ pe baza multiplicativității calculului funcțional analitic; prin urmare, operatorul P_1 este idempotent. Deoarece $\chi_2 = 1 - \chi_1$ este funcția caracteristică a mulțimii U_2, operatorul $P_2 = \chi_2(T)$ este și el idempotent. În plus, din egalitățile $\chi_1 + \chi_2 = 1$ și $\chi_1\chi_2 = 0$ obținem egalitățile $P_1 + P_2 = 1$ și $P_1P_2 = 0$.

Fie subspațiul liniar $X_j = P_j(X)$. Deoarece P_j este proiector, X_j este închis. Într-adevăr, fie $\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X_j$ un șir convergent către un vector $y \in X$. Atunci $y_k = P_j x_k$, prin urmare $P_j y_k = P_j^2 x_k = P_j x_k = y_k \to P_j y = y$ $(k \to \infty)$, deci $y \in X_j$. Din faptul că $P_1 + P_2 = 1$ rezultă că $X = X_1 + X_2$, iar din faptul că $P_1P_2 = 0$ obținem că $X_1 \cap X_2 = \{0\}$, ceea ce demonstrează afirmațiile de la 1°.

Pentru a demonstra 2° vom remarca în primul rînd că T comută cu P_j (ca imagini de funcții analitice prin calcul funcțional), deci că $T(X_j) \subset X_j$. Așadar, putem vorbi de mulțimea $\sigma(T, X_j)$ (care este, de fapt, spectrul restricției operatorului T la subspațiul X_j).

Vom demonstra acum incluziunea $\sigma(T, X_j) \subset K_j$. Fie, pentru aceasta, un punct fixat $w \notin K_j$. Vom considera funcția $g_j(z) = (w - z)^{-1}\chi_j(z)$, care este analitică în $U_1 \cup U_2$. În plus, $(w - z)g_j(z) = \chi_j(z)$ și $g_j = \chi_j g_j$. Din aceste relații deducem că $(w - T)g_j(T) = P_j$ și că $g_j(T) = P_j g_j(T)$. În particular, $g_j(T)$ invariază spațiul X_j și avem

$$(w - T|X_j)(g_j(T)|X_j)y = (g_j(T)|X_j)(w - T|X_j)y = y, \quad y \in X_j,$$

ceea ce arată că $x \notin \sigma(T, X_j)$.

Din incluziunea demonstrată rezultă că mulțimea $K = \sigma(T, X_1) \cup \sigma(T, X_2)$ este conținută în $K_1 \cup K_2$. Să presupunem că am avea $K \neq K_1 \cup K_2$ și să fixăm un punct $z_0 \in K_1 \cup K_2 \setminus K$. Să definim apoi operatorul

$$V_0x = (z_0 - T)|X_1)^{-1}P_1x + (z_0 - T|X_2)^{-1}P_2x, \qquad x \in X,$$

care are sens datorită alegerii punctului z_0. Este limpede atunci că

$$(z_0 - T)V_0x = P_1x + P_2x = x = V_0(z_0 - T)x, \qquad x \in X,$$

deci V_0 este inversul lui $z_0 - T$. Această concluzie este absurdă; prin urmare, va trebui să avem egalitatea $K = K_1 \cup K_2$.

În sfîrșit, să observăm că subspațiile X_j nu pot fi nule. Într-adevăr, admițînd de pildă că $X_1 = \{0\}$, vom putea scrie că

$$\sigma(T, X) = \sigma(T, X_2) = K_2 \neq \sigma(T, X),$$

ceea ce nu se poate. Demonstrația este completă.

1.5.3. COROLAR. *Fie $K \subset \sigma(T, X)$ o parte compactă cu proprietatea că $\sigma(T, X)\setminus K$ este mulțime compactă. Fie Δ o mulțime deschisă, $\Delta \supset K$, $\bar{\Delta} \cap (\sigma(T, X)\setminus K) = \emptyset$, astfel încît $\Gamma = \partial\Delta$ să fie un contur admisibil ce înconjoară mulțimea K. Atunci integrala*

$$P_K = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(z - T)^{-1}\,dz$$

nu depinde de conturul Γ *şi defineşte un proiector cu următoarele proprietăţi* :

1^0 *Dacă* $V \in \mathcal{L}(X)$ *comută cu* T, *atunci* V *comută cu* P_K.

2^0 *Spaţiul* $P_K(X)$ *este invariant la acţiunea lui* T *şi avem* $\sigma(T, P_K(X)) = K$.

Demonstraţie. Dacă $U_1 \supset \overline{\Delta}$, $U_2 \supset \sigma(T, X) \setminus K$ sînt mulţimi deschise cu proprietatea că $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, putem alege un contur admisibil ce înconjoară $\sigma(T, X)$ în $U_1 \cup U_2$, de forma $\Gamma \cup \Gamma'$, unde Γ' se află în U_2. Funcţia caracteristică χ_1 a mulţimii U_1 (în $U_1 \cup U_2$) fiind nulă pe U_2, operatorul $\chi_1(T)$ va fi dat exact de integrala P_K din enunţ (a se vedea şi demonstraţia teoremei precedente). Dacă $VT = TV$, atunci

$$V(z - T)^{-1} = (z - T)^{-1}(z - T)V(z - T)^{-1} = (z - T)^{-1}V, \qquad z \notin \sigma(T, X),$$

de unde rezultă $P_K V = V P_K$, adică afirmaţia 1^0.

Afirmaţia 2^0 este o consecinţă imediată a teoremei 1.5.2.

1.5.4. OBSERVAŢIE. Fie B o algebră normată cu unitate, în care nu avem neapărat $\| 1 \| = 1$. În acest caz, conform observaţiei 0.5.3, putem renorma algebra B cu o normă echivalentă $\| \cdot \|_0$, astfel încît $\| 1 \|_0 = 1$. Vom desemna în cele ce urmează cu numele de *normă operatorială* norma $\| \cdot \|_0$ ataşată unei norme date $\| \cdot \|$, prin acest procedeu. Să remarcăm că dacă norma $\| \cdot \|$ este deja operatorială, norma operatorială $\| \cdot \|_0$ trebuie să coincidă cu ea.

Vom prezenta în cele ce urmează o versiune a teoremei 1.5.2. valabilă în algebre Banach comutative.

1.5.5. TEOREMĂ. *Fie* B *o algebră Banach comutativă, cu unitate. Să presupunem că există un element* $a \in B$ *cu proprietatea că* $\sigma_B(a) = K_1 \cup K_2$ *unde* K_1, K_2 *sînt mulţimi nevide, compacte şi disjuncte. Atunci au loc următoarele afirmaţii* :

1^0 *Unitatea lui* B *admite reprezentarea* $1 = e_1 + e_2$, *unde* e_1, e_2 *sînt idempotenţi nenuli, cu* $e_1 e_2 = 0$.

2^0 *Dacă* $B_j = e_j B$ $(j = 1, 2)$, *atunci* B_j *este un ideal închis în* B, *astfel încît* $B = B_1 + B_2$ *şi* $B_1 \cap B_2 = \{0\}$.

3^0 *Renormînd algebra* B_j *cu norma operatorială,* B_j *devine o algebră Banach cu unitatea* e_j, *iar spaţiul* $\Gamma(B_j)$ *se poate identifica, printr-un omeomorfism, cu o parte a lui* $\Gamma(B)$. *Cu această identificare, avem* $\Gamma(B) = \Gamma(B_1) \cup \Gamma(B_2)$ *şi* $\Gamma(B_1) \cap \Gamma(B_2) = \emptyset$.

4^0 $\sigma_{B_j}(e_j a) = K_j$.

Demonstraţie. Să considerăm aplicaţia $B \ni b \to L_b \in \mathcal{L}(B)$, unde $L_b x = bx (x \in B)$. Este simplu de văzut că această aplicaţie este un omomorfism de algebre cu unitate, care este şi izometrie. Mai mult decît atît, avem egalitatea $\sigma_B(b) = \sigma(L_b, B)$ oricare ar fi $b \in B$. Într-adevăr, incluziunea $\sigma(L_b, B) \subset \sigma_B(b)$ rezultă din propoziţia 1.4.5. Invers, dacă $w \notin \sigma(L_b, B)$, atunci elementul $(w - L_b)^{-1}(1)$, care este evident invers la

dreapta pentru $w - b$, este și invers la stînga datorită comutativității algebrei.

În particular, $\sigma_B(a) = \sigma(L_a, B) = K_1 \cup K_2$; prin urmare, putem aplica operatorului L_a teorema 1.5.2. Dacă P_j este idempotentul corespunzînd mulțimii K_j (construit ca în teorema 1.5.2), atunci $P_j = L_{e_j}$, în baza izomorfismului dintre algebra B și algebra $\{L_b : b \in B\} \subset \mathcal{L}(B)$. În particular, $1 = e_1 + e_2$, $e_1 e_2 = 0$ și e_1, e_2 sînt idempotenți nenuli în algebra B.

2° Ca în teorema 1.5.2, avem $B_j = e_j B$, prin urmare $B = B_1 + B_2$ și $B_1 \cap B_2 = \{0\}$. Este clar că B_j este ideal în B. Faptul că B_j este închis rezultă din teorema 1.5.2.

3° Idempotentul e_j este unitate în algebra B_j. Dacă renormăm algebra B_j cu norma operatorială, elementul e_j va fi de normă unu în noua normă, deci B_j devine algebră Banach cu unitate în accepțiunea noastră.

Fie acum mulțimile

$$\Gamma_j = \{\gamma \in \Gamma(B) : \gamma(e_j) \neq 0\}, \quad j = 1, 2.$$

Deoarece $\gamma(e_j^2) = \gamma(e_j)^2 = \gamma(e_j)$, numărul $\gamma(e_j)$ este zero sau unu. Prin urmare, $\Gamma(B) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$; întrucît $\Gamma_j = \{\gamma \in \Gamma(B) : \gamma(e_j) = 1\}$, rezultă că Γ_j este o parte compactă a lui $\Gamma(B)$.

Vom identifica spațiul caracterelor $\Gamma(B_j)$ cu mulțimea Γ_j. În acest scop vom defini aplicația $h_j : \Gamma_j \to \Gamma(B_j)$ prin relația $h_j(\gamma) = \gamma \mid B_j$. Să arătăm că h_j este o aplicație bijectivă. Într-adevăr, dacă $\gamma', \gamma'' \in \Gamma_j$ și $h_j(\gamma') = h_j(\gamma'')$, deci $\gamma' \mid B_j = \gamma'' \mid B_j$, atunci

$$\gamma'(b) = \gamma'((e_j + (1 - e_j))b) = \gamma'(e_j b) = \gamma''(e_j b) = \gamma''(b), \quad b \in B,$$

deci aplicația h_j este injectivă. Apoi, dacă $\gamma_j \in \Gamma(B_j)$, definim $\gamma \in \Gamma(B)$ prin $\gamma(b) = \gamma_j(e_j b)$ $(b \in B)$. Atunci $h_j(\gamma) = \gamma_j$, deci aplicația h_j este și surjectivă. Mai mult decît atît, aplicația h_j este continuă. Pentru a demonstra acest fapt, să considerăm în $\Gamma(B_j)$ o mulțime deschisă de forma

$$\{\gamma_j \in \Gamma(B_j) : |\gamma_j(b_k) - \gamma_{j_0}(b_k)| < \varepsilon, \ k = 1, \ldots, m\},$$

cu $b_1, \ldots, b_m \in B_j$ și $\varepsilon > 0$. Preimaginea sa este mulțimea deschisă

$$\{\gamma \in \Gamma_j ; |\gamma(b_k) - \gamma_0(b_k)| < \varepsilon, \ k = 1, \ldots, m\},$$

unde $h_j(\gamma) = \gamma_j$ și $h_j(\gamma_0) = \gamma_{j_0}$, pe baza surjectivității aplicației h_j. Întrucît mulțimile de tipul considerat generează topologia lui $\Gamma(B_j)$ (a se vedea paragraful 0.5 și definițiile 0.3.14), rezultă continuitatea aplicației h_j. Spațiile Γ_j și $\Gamma(B_j)$ fiind compacte, inversa h_j^{-1} este și ea continuă (ceea ce se poate vadea și direct). Așadar, h_j este un omeomorfism, care permite identificarea mulțimii $\Gamma(B_j)$ cu Γ_j.

4° În baza observațiilor făcute la primul punct, avem egalitățile

$$\sigma_{B_j}(e_j a) = \sigma(L_{e_j a}, B_j) = \sigma(L_a, B_j) = K_j,$$

ceea ce încheie demonstrația teoremei.

1.6. CALCULUL FUNCȚIONAL ANALITIC AL OPERATORILOR NEMĂRGINIȚI

Fie X un spațiu Banach. Reamintim că $\mathscr{C}(X)$ desemnează familia tuturor operatorilor închiși, definiți pe subspații liniare ale lui X, cu valori în X.

1.6.1. DEFINIȚIE. Fie $T \in \mathscr{C}(X)$. Vom cosidera mulțimea de puncte din planul complex

$$\{z \in \mathbf{C} : z - T : D(T) \to X \text{ nu este bijectiv}\}.$$

Această mulțime, notată cu $\sigma(T, X)$, va fi numită *spectrul* operatorului T în X.

Este limpede că mulțimea $\sigma(T, X)$ coincide cu mulțimea (1.5.1), în ipoteza că $T \in \mathscr{L}(X)$. Ca și în cazul operatorilor mărginiți, dacă $z \notin \sigma(T, X)$, atunci $(z - T)^{-1} : X \to D(T) \subset X$ este un operator continuu în baza teoremei graficului închis. Spre deosebire de operatorii mărginiți, se poate întîmpla însă ca $\sigma(T, X) = \mathbf{C}$ (exercițiul 1.7.18).

1.6.2. LEMĂ. *Mulțimea* $\sigma(T, X)$ *este închisă în* $\mathbf{C}$.

Demonstrație. Dacă $\sigma(T, X) = \mathbf{C}$, afirmația este evidentă. Putem deci presupune că $\sigma(T, X) \neq \mathbf{C}$ și fie $z_0 \notin \sigma(T, X)$. Ca și în lema 1.3.2, dacă $z \in \mathbf{C}$ satisface estimarea $|z - z_0| < \|(z_0 - T)^{-1}\|^{-1}$, atunci seria

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z - z_0)^k (z_0 - T)^{-k-1} \tag{1.6.1}$$

este convergentă în $\mathscr{L}(X)$. Vom arăta că și în acest caz această serie definește inversul operatorului $z - T$. Într-adevăr, fie $R(z, T)$ suma seriei (1.6.1). Este ușor de văzut că

$$R(z, T)(z - T)\, x = x, \quad x \in D(T).$$

Fie acum $y \in X$ un element arbitrar. Atunci

$$(z - T) \sum_{k=0}^{m} (-1)^k (z - z_0)^k (z_0 - T)^{-k-1} y =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k (z - z_0)^{k+1} (z_0 - T)^{-k-1} y + \sum_{k=0}^{m} (-1)^k (z - z_0)^k (z_0 - T)^{-k} y =$$

$$= y + (-1)^m (z - z_0)^{m+1} (z_0 - T)^{-m-1} y,$$

caleul care are sens deoarece $R((z_0 - T)^{-1}) = D(T) = D(z - T)$. Așadar, șirul

$$x_m = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k (z - z_0)^k (z_0 - T)^{-k-1} y \in D(z - T)$$

are proprietatea că $x_m \to R(z, T)y$ și $(z - T)x_m \to y$ cînd $m \to \infty$, deoarece

$$\|(-1)^m (z - z_0)^m (z_0 - T)^{-m-1} y\| \leqslant (|z - z_0| \, \|(z_0 - T)^{-1}\|^{-1})^{m+1} \|y\|,$$

ceea ce arată că $(z - T)R(z, T)y = y$, adică $R(z, T) = (z - T)^{-1}$.

1.6.3. OBSERVAȚII. 1° Dezvoltarea în serie din lema precedentă ne arată că *funcția rezolvantă* $z \to (z - T)^{-1}$ este analitică în mulțimea $\mathbf{C} \setminus \sigma(T, X)$. Vom nota uneori cu $\rho(T, X)$ mulțimea $\mathbf{C} \setminus \sigma(T, X)$.

2° Dacă $z, w \in \rho(T, X)$, avem și în acest caz *ecuația rezolvantă*

$$(z - T)^{-1} - (w - T)^{-1} = (w - z)(z - T)^{-1}(w - T)^{-1},$$

care se obține printr-un calcul simplu.

3° Deoarece spectrul unui operator închis nu mai este, în general, o mulțime mărginită, este mult mai convenabil să lucrăm în planul complex compactificat $\mathbf{C}_\infty$.

1.6.4. DEFINIȚII. Fie $T \in \mathscr{C}(X)$. Vom defini *spectrul extins* $\sigma_\infty(T, X)$ al operatorului T astfel:

(i) dacă rezolvanta $(z - T)^{-1}$ este definită în complementara unei submulțimi compacte din $\mathbf{C}$ și este analitică la infintit, vom pune $\sigma_\infty(T, X) = \sigma(T, X)$;

(ii) dacă rezolvanta nu îndeplinește condiția de la (i), atunci vom pune $\sigma_\infty(T, X) = \sigma(T, X) \cup \{\infty\}$.

Evident, $\sigma_\infty(T, X)$ este o submulțime compactă a lui $\mathbf{C}_\infty$.

Vom nota cu $\mathscr{A}_T$ mulțimea funcțiilor analitice, definite în vecinătăți ale mulțimii $\sigma_\infty(T, X)$ (notația este compatibilă cu definiția 1.3.5). Dacă $\sigma_\infty(T, X) \ni \infty$, atunci funcțiile din $\mathscr{A}_T$ sînt, evident, presupuse analitice la infinit. Să observăm că dacă $\sigma_\infty(T, X) = \mathbf{C}_\infty$, atunci $\mathscr{A}_T$ conține numai constantele, în baza teoremei lui Liouville.

Fie F și U mulțimi situate în $\mathbf{C}_\infty$, $F \ni \infty$, F închisă, U deschisă, $F \subset U$. Fie $\Gamma = \partial\Delta$ un sistem finit de curbe jordaniene rectificabile, care nu se intersectează două cîte două, pozitiv orientat în raport cu Δ (definiția 1.2.14), unde $F \subset \Delta \subset \bar{\Delta} \subset U$. Sistemul Γ se va numi *contur admisibil ce înconjoară pe F în U* (această definiție completează definiția 1.3.6).

Dacă $f \in \mathscr{A}_T$, $f : U_f \to \mathbf{C}$ (U_f deschisă în $\mathbf{C}_\infty$), vom alege un contur admisibil $\Gamma = \partial\Delta$ ce înconjoară mulțimea $\sigma_\infty(T, X)$ în U_f și vom defini operatorul

$$f(T) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma f(z)(z - T)^{-1}\,dz, & \text{dacă } \sigma_\infty(T, X) \not\ni \infty, \\ f(\infty) + \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma f(z)(z - T)^{-1}\,dz, & \text{dacă } \sigma_\infty(T, X) \ni \infty. \end{cases} \tag{1.6.2}$$

Ca și în cazul formulei (1.3.3), definiția lui $f(T)$ nu depinde de conturul de integrare Γ, demonstrația acestui fapt fiind analoagă cu demonstrația lemei 1.3.10.

Observația 1.3.11 ne permite să lucrăm cu clase de echivalență de funcții din $\mathscr{A}_T$, egale pe o vecinătate a spectrului extins, și să considerăm algebra $[\mathscr{A}_T]$ a acestor clase. Vom putea vorbi și în acest caz de *convergența* unui șir de clase de echivalență și de *continuitatea* aplicațiilor defi-

nite pe algebra $[\mathscr{A}_T]$. În particular, ne va interesa aplicația $[\mathscr{A}_T] \ni [f] \to [f](T) \in \mathscr{L}(X)$, unde $[f](T) = f(T)$, membrul drept fiind dat de (1.6.2). Cum am mai remarcat, operatorul $f(T)$ nu depinde de funcția f, ci numai de clasa sa de echivalență în $[\mathscr{A}_T]$.

1.6.5. PROPOZIȚIE. *Aplicația* $[\mathscr{A}_T] \ni [f] \to [f](T) \in \mathscr{L}(X)$ *este un omomorfism continuu de algebre cu unitate.*

Demonstrație. Dacă $\sigma_\infty(T, X) \not\ni \infty$, afirmația rezultă ca în demonstrația teoremei 1.3.12. Va fi deci suficent să considerăm cazul cînd $\sigma_\infty(T, X) \ni \infty$. Și în acest caz liniaritatea aplicației $[f] \to [f](T)$ se obține ușor (a se vedea primul punct din demonstrația teoremei 1.3.12), de aceea o vom lăsa pe seama cititorului, ca exercițiu. Să ne ocupăm deci de multiplicativitatea aplicației.

Fie $\Gamma_1 = \partial\Delta_1$, $\Gamma_2 = \partial\Delta_2$ contururi admisibile ce înconjoară mulțimea $\sigma_\infty(T, X)$ în $U_{f_1} \cap U_{f_2}$ astfel încît

$$\sigma_\infty(T, X) \subset \Delta_1 \subset \bar{\Delta}_1 \subset \Delta_2 \subset \bar{\Delta}_2 \subset U_{f_1} \cap U_{f_2},$$

unde f_1, f_2 sînt funcții fixate din $\mathscr{A}_T$ iar U_{f_1}, U_{f_2} sînt domeniile lor de definiție. Atunci

$$f_1(T)f_2(T) = f_1(\infty)f_2(\infty) + f_1(\infty)\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} f_2(w)\,(w - T)^{-1}\,dw +$$

$$+ f_2(\infty)\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} f_1(z)\,(z - T)^{-1}\,dz +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} f_1(z)\,(z - T)^{-1}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} f_2(w)\,(w - T)^{-1}\,dw\right)dz.$$

Utilizînd teorema lui Fubini, ecuația rezolvantă și formula lui Cauchy la infinit (teorema 1.2.15), vom putea scrie că

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} f_1(z)(z - T)^{-1}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} f_2(w)\,(w - T)^{-1}\,dw\right)dz =$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2} f_1(z)f_2(w)(w - z)^{-1}\,((z - T)^{-1} - (w - T)^{-1})\,dz\,dw =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} f_1(z)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} f_2(w)\,(w - z)^{-1}\,dw\right)(z - T)^{-1}\,dz -$$

$$- \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} f_2(w)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} f_1(z)\,(w - z)^{-1}\,dz\right)(w - T)^{-1}\,dw =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} f_1(z)\,(f_2(z) - f_2(\infty))\,(z - T)^{-1}\,dz -$$

$$- f_1(\infty)\,\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} f_2(w)\,(w - T)^{-1}\,dw$$

(în aplicarea formulei lui Cauchy la infinit s-a ţinut seama de faptul că $z \in \Delta_2$ şi $w \notin \overline{\Delta}_1$). Confruntînd calculele de mai sus, obţinem egalitatea

$$f_1(T)f_2(T) = f_1(\infty)f_2(\infty) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} f_1(z)f_2(z)\,(z - T)^{-1}\,dz = (f_1 f_2)(T),$$

adică multiplicativitatea dorită.

Pentru a obţine continuitatea, vom observa că integrala (1.6.2) [cazul $\sigma_\infty(T, X) \ni \infty$] se poate estima astfel:

$$\|f(T)\| \leqslant M \sup_{z\in\Delta} |f(z)|,$$

unde $M \geqslant 0$ este o constantă ce nu depinde de f. De fapt putem lua

$$M = 1 + (2\pi)^{-1} v(\Gamma) \sup_{z\in\Gamma} \|(z - T)^{-1}\|$$

(a se vedea şi lema 1.3.9). Utilizînd această estimare, obţinem continuitatea aplicaţiei $[f] \to [f](T)$ ca în demonstraţia teoremei 1.3.12, punctul 3°.

În sfîrşit, să observăm că aplicaţia $[f] \to [f](T)$ duce unitatea algebrei $[\mathscr{A}_T]$ în unitatea algebrei $\mathscr{L}(X)$. Într-adevăr, dacă $f \equiv 1$, în formula (1.6.2) (cazul $\sigma_\infty(T, X) \ni \infty$) contează doar termenul $f(\infty) = 1$, integrala din funcţia $z \to (z - T)^{-1}$ fiind nulă, deoarece această funcţie este analitică în mulţimea deschisă, relativ compactă Δ_c (definiţia 1.2.14) a cărei frontieră este Γ.

1.6.6. PROPOZIŢIE. *Fie $T \in \mathscr{C}(X)$ astfel încît $\sigma_\infty(T, X) \not\ni \infty$. Atunci $T \in \mathscr{L}(X)$.*

Demonstraţie. Din ipoteză rezultă că există un număr $r > 0$ astfel încît funcţia $z \to (z - T)^{-1}$ există pentru $|z| > r$ şi este analitică la infinit. Din analiticitatea rezolvantei în jurul punctului de la infinit, obţinem o dezvoltare în serie de forma

$$(z - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} A_k, \quad |z| > r,$$

unde $A_k \in \mathscr{L}(X)$. Vom defini operatorii continui

$$E = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} (z - T)^{-1}\,dz, \quad A = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} z(z - T)^{-1}\,dz,$$

unde $R > r$. Utilizînd convergenţa uniformă pe submulţimile compacte a seriei care defineşte pe $(z - T)^{-1}$, avem următoarele egalităţi :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} z^n(z-T)^{-1}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} z^n\left(\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}A_k\right)dz =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} z^{n-k}\,dz\right)A_k = A_{n+1},$$

în care am utilizat un argument din demonstraţia teoremei 1.3.12, punctul 4°. Evident, $A_1 = E$ şi, în virtutea propoziţiei 1.6.5, $A_{n+1} = A^n$ $(n \geqslant 1)$. În virtutea aceleiaşi propoziţii, $E^2 = E$ şi $A^n = EA^n = A^nE$. Să observăm apoi egalitatea

$$(z - T)^{-1} = A_0 + E(z - A)^{-1}, \quad |z| > r_1, \tag{1.6.3}$$

care rezultă din dezvoltarea în serie a rezolvantei $(z - T)^{-1}$, utilizînd relaţiile remarcate mai sus, unde $r_1 = \max\{r, \|A\|\}$.

Să arătăm mai întîi că $A_0 = 0$. Pentru aceasta fie $x \in X$ un element fixat şi fie $\{z_k\}_k$ un şir în mulţimea $\{|z| > r_1\}$ astfel încît $z_k \to \infty (k \to \infty)$. Vom nota $y_k = z_k^{-1}(z_k - T)^{-1}x$ şi vom observa că $y_k \to 0$ cînd $k \to \infty$. Remarcăm de asemenea că

$$Ty_k = z_k^{-1}x + (z_k - T)^{-1}x \to A_0x \ (k \to \infty).$$

Operatorul T fiind închis, din convergenţa celor două şiruri deducem că $A_0x = 0$. Vectorul x fiind arbitrar, se obţine $A_0 = 0$.

Vom arăta apoi că $E = 1$. Într-adevăr, operatorul E fiind idempotent, dacă $E \neq 1$, atunci există un vector $x \in X$, $x \neq 0$, astfel încît $Ex = 0$. Scriind relaţia (1.6.3) în vectorul x, deducem atunci că $(z - T)^{-1}x = 0$, adică $x = 0$, ceea ce este absurd [remarcaţi că E şi $(z - A)^{-1}$ comută!].

Aşadar, relaţia (1.6.3) se reduce la egalitatea $(z - T)^{-1} = (z - A)^{-1}$, ceea ce ne arată că $T = A \in \mathscr{L}(X)$.

1.6.7. OBSERVAŢII. 1° Propoziţia 1.6.6 ne spune că $\sigma_\infty(T, X) \not\ni \infty$ dacă şi numai dacă $T \in \mathscr{L}(X)$.

2° Tot din propoziţia 1.6.6 deducem uşor că dacă $X \neq \{0\}$, atunci $\sigma_\infty(T, X) \neq \emptyset$ pentru orice $T \in \mathscr{C}(X)$. Într-adevăr, dacă $\sigma_\infty(T, X) = \emptyset$, atunci $T \in \mathscr{L}(X)$ şi $\sigma(T, X) = \emptyset$, ceea ce este posibil doar dacă $X = \{0\}$.

1.6.8. LEMĂ. *Fie $T \in \mathscr{C}(X) \setminus \mathscr{L}(X)$ şi fie $f \in \mathscr{A}_T$ astfel încît $f(\infty) = 0$. Atunci $f(T)X \subset D(T)$ şi $g(T) = Tf(T)$, unde $g(z) = zf(z)$. În plus, $Tf(T)x = f(T)Tx$ oricare ar fi $x \in D(T)$.*

Demonstraţie. Dacă $\sigma_\infty(T, X) = \mathbf{C}_\infty$, atunci $f = g = 0$ şi afirmaţia este trivială. Vom putea deci presupune că $\sigma_\infty(T, X) \neq \mathbf{C}_\infty$.

Deoarece $f(\infty) = 0$, este clar că $g \in \mathscr{A}_T$. Fie $\Gamma = \partial\Delta$ un contur admisibil ce înconjoară mulţimea $\sigma_\infty(T, X)$ în domeniul de definiţie al funcţiei g. Vom putea scrie atunci că

$$g(T) = g(\infty) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} zf(z)(z - T)^{-1}\,dz =$$

$$= g(\infty) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)dz + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma Tf(z)\,(z - T)^{-1}\,dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)\,dz + g(\infty) + T\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)\,(z - T)^{-1}\,dz\right),$$

în baza teoremei 1.1.6. Vom observa apoi că

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(z - \lambda)f(z)}{z - \lambda}\,dz = -\lim_{z\to\infty}(z - \lambda)f(z) = -g(\infty),$$

unde $\lambda \notin \overline{\Delta}$ este un punct fixat. Reîntorcîndu-ne la calculul de mai sus, obţinem $g(T) = Tf(T)$ [faptul că $f(T)X \subset D(T)$ este o consecinţă a teoremei 1.1.6].

Un calcul similar, pe care-l lăsăm pe seama cititorului ca exerciţiu, ne arată că dacă $x \in D(T)$, atunci $f(T)Tx = Tf(T)x$.

1.6.9. COROLAR. *Fie $T \in \mathscr{C}(X)$ şi fie $w \notin \sigma(T, X)$. Vom nota cu $f_w \in \mathscr{A}_T$ funcţia $f_w(z) = (w - z)^{-1}$. Atunci $f_w(T) = (w - T)^{-1}$.*

Demonstraţie. Cazul mărginit fiind cunoscut, ne putem limita la situaţia $\sigma_\infty(T, X) \ni \infty$. Deoarece $f_w(\infty) = 0$, în baza lemei precedente, $g_w(T) = Tf_w(T)$, unde $g_w(z) = zf_w(z)$. Obţinem deci $(w - T)f_w(T) = (wf_w - g_w)(T) = 1$.

Invers, dacă $x \in D(T)$, atunci $f_w(T)(w - T)x = (w - T)f_w(T)\,x = x$ tot pe baza lemei 1.6.8, prin urmare, $f_w(T) = (w - T)^{-1}$.

Pentru orice operator $T \in \mathscr{C}(X)$ şi orice polinim $P \in \mathscr{P}$, $P(z) = \lambda_0 z^n + \ldots + \lambda_n$, putem defini operatorul $P(T) = \lambda_0 T^n + \ldots + \lambda_n$ pe subspaţiul $D(P(T)) = D(T^n)$ (a se vedea definiţiile 0.3.1). Vom strînge la un loc cîteva din rezultatele obţinute pînă acum în legătură cu calculul funcţional analitic al unui operator închis.

1.6.10. TEOREMĂ. *Pentru orice operator $T \in \mathscr{C}(X)$ există un omomorfism continuu de algebre cu unitate*

$$[\mathscr{A}_T] \ni [f] \to [f](T) \in \mathscr{L}(X)$$

astfel încît $(Pf)(T) = P(T)f(T)$ oricare ar fi $f \in \mathscr{A}_T$ şi $P \in \mathscr{P}$ pentru care $Pf \in \mathscr{A}_T$. În plus, $P(T)f(T)x = f(T)P(T)x$ pentru orice $x \in D(P(T))$.

Demonstraţie. Existenţa omomorfismului $[f] \to [f](T)$ a fost demonstrată în propoziţia 1.6.5. Dacă gradul polinomului P este $\leqslant 1$, afirmaţiile teoremei rezultă din lema 1.6.8. Dacă gradul lui P este > 1, afirmaţiile teoremei se obţin printr-un raţionament inductiv, pe care-l lăsăm ca exerciţiu.

Demonstrăm în continuare o versiune a teoremei 1.4.1.

1.6.11. TEOREMĂ. *Fie $T \in \mathscr{C}(X)$ şi fie $f \in \mathscr{A}_T$. Atunci are loc egalitatea $\sigma(f(T), X) = f(\sigma_\infty(T, X))$.*

Demonstrație. Este suficient să ne ocupăm doar de cazul $\sigma_\infty(T, X) \ni \infty$.

Fie, mai întîi $\lambda \notin f(\sigma_\infty(T, X))$. Ca și în cazul mărginit, avem $(\lambda - f)^{-1} \in \mathscr{A}_T$, prin urmare

$$(\lambda - f(T))(\lambda - f)^{-1}(T) = 1,$$

ceea ce ne arată că $(\lambda - f(T))^{-1} = (\lambda - f)^{-1}(T)$, adică $\lambda \notin \sigma(f(T), X)$.

Reciproc, fie $\lambda \notin \sigma(f(T), X)$. Să admitem că ar exista un punct $z_0 \in \sigma_\infty(T, X)$ astfel încît $\lambda = f(z_0)$. Vom deosebi două cazuri.

Dacă $z_0 \neq \infty$, vom considera funcția analitică g care satisface ecuația $f(z_0) - f(z) = (z_0 - z)g(z)$ în domeniul de definiție al funcției f. Este clar că $g \in \mathscr{A}_T$ și că $g(\infty) = 0$. Prin aplicarea lemei 1.6.8 deducem că

$$(z_0 - T)\, g(T)\, (f(z_0) - f(T))^{-1} = 1$$

și

$$g(T)\, (f(z_0) - f(T))^{-1} (z_0 - T)x = x,$$

oricare ar fi $x \in D(T)$. Rezultă de aici că $z_0 \notin \sigma_\infty(T, X)$, ceea ce nu se poate.

Să presupunem acum că $z_0 = \infty$. Deoarece funcția $f(\infty) - f(z)$ este nulă la infinit, în baza lemei 1.6.8. avem $(f(\infty) - f(T))X \subset D(T)$. Pe de altă parte, cum $f(\infty) \notin \sigma(f(T), X)$, $(f(\infty) - f(T))X = X$. Aceasta înseamnă că $D(T) = X$, prin urmare $T \in \mathscr{L}(X)$, ceea ce contrazice faptul că $\sigma_\infty(T, X) \ni \infty$. Demonstrația este completă.

1.6.12. PROPOZIȚIE. *Fie $T \in \mathscr{C}(X)$ și fie $K \subset \sigma(T, X)$ o parte compactă cu proprietatea că $\sigma_\infty(T, X) \setminus K$ este mulțime compactă în $\mathbf{C}_\infty$. Fie Δ o mulțime deschisă, $\Delta \supset K$, $\bar{\Delta} \cap (\sigma_\infty(T, X) \setminus K) = \emptyset$ astfel încît $\Gamma = \partial\Delta$ să fie un contur admisibil ce înconjoară mulțimea K. Atunci integrala*

$$P_K = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (z - T)^{-1}\, dz$$

definește un proiector cu proprietatea că $P_K(X) \subset D(T)$ și $\sigma(T, P_K(X)) = K$. În plus, P_K nu depinde de conturul Γ.

Demonstrație. Evident, afirmația este o versiune a corolarului 1.5.3. Faptul că P_K este un proiector (care nu depinde de conturul Γ) se obține la fel ca în rezultatul citat. Mai precis, dacă $U \supset \bar{\Delta}$ este o mulțime deschisă astfel încît $U \cap V = \emptyset$, unde V este o vecinătate deschisă a mulțimii $\sigma_\infty(T, X) \setminus K$, și dacă χ este funcția caracteristică a mulțimii U în $U \cup V$, atunci $P_K = \chi(T)$ este idempotent. Dacă $\sigma_\infty(T, X) \ni \infty$, atunci $V \ni \infty$, deci χ este nulă la infinit. În baza lemei 1.5.3, vom avea atunci $P_K(X) = \chi(T)(X) \subset D(T)$, deci $T \mid P_K(X) \in \mathscr{L}(P_K(X))$.

Vom demonstra apoi egalitatea $\sigma(T, P_K(X)) = K$. Deoarece $\sigma_\infty(T, X) \neq \mathbf{C}_\infty$, vom alege un punct $w \in \mathbf{C}$, $w \notin \sigma_\infty(T, X)$. Fie operatorul $A = (w - T)^{-1}$. Dacă definim funcția $\varphi(z) = (w - z)^{-1}$, în baza corolarului 1.6.9 avem $A = \varphi(T)$. Mai mult decît atît, $\sigma(A, T) = \varphi(\sigma_\infty(T, X))$, în virtutea teoremei 1.6.11. De aici rezultă că $\varphi(K) \subset \sigma(A, X)$ și că $\sigma(A, X) \setminus \varphi(K)$ este compactă.

Vom demonstra acum că proiectorul ataşat operatorului A şi mulţimii $\varphi(K)$ prin corolarul 1.5.3 coincide cu P_K. În primul rînd vom observa egalitatea

$$((w - z)^{-1} - (w - T)^{-1})^{-1} = w - z + (w - z)^2(z - T)^{-1},$$

care se obţine printr-un calcul simplu, unde $z \notin \sigma_\infty(T, X)$. Vom nota $\xi = \varphi(z)$, $\Gamma_1 = \varphi(\Gamma)$ şi $\Delta_1 = \varphi(\Delta)$. Deoarece $(z - T)^{-1} = \xi^2((\xi - A)^{-1} - \xi^{-1})$ şi $dz = \xi^{-2}\,d\xi$, vom putea scrie că

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (z - T)^{-1}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}((\xi - A)^{-1} - \xi^{-1})d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}(\xi - A)^{-1}\,d\xi, \tag{1.6.4}$$

deoarece $0 \notin \overline{\Delta}_1$, ultima integrală definind proiectorul ataşat mulţimii $\varphi(K)$ şi operatorului A. În baza corolarului 1.5.3, avem egalitatea $\sigma(A, P_K(X)) = \varphi(K)$. Din această egalitate vom deduce relaţia dorită. Mai remarcăm egalitatea între operatorii $A \mid P_K(X)$ şi $\varphi(T \mid P_K(X))$. Într-adevăr, deoarece $(w - T)A = 1$, folosind invarianţa spaţiului $P_K(X)$, deducem uşor că

$$(w - T \mid P_K(X))\,(A \mid P_K(X)) = (A \mid P_K(X))\,(w - T \mid P_K(X)) = 1 \mid P_K(X).$$

Va trebui, aşadar, să avem $\sigma(A, P_K(X)) = \varphi(\sigma(T, P_K(X))$, iar din bijectivitatea aplicaţiei φ vom deduce $\sigma(T, P_K(X)) = K$, ceea ce încheie demonstraţia.

1.7.1 EXERCIŢII ŞI COMPLETĂRI

1.7.1. Fie X_0 un subspaţiu liniar al unui spaţiu Banach Y. Vom nota cu X închiderea spaţiului X_0 în Y. Arătaţi că X este izomorf, printr-un izomorfism care este şi izometrie, cu completatul spaţiului X_0 în sensul teoremei 0.2.14.

1.7.2. Fie Ω o mulţime arbitrară şi fie X un spaţiu Banach. Vom nota cu $F_m(\Omega, X)$ mulţimea tuturor funcţiilor $f : \Omega \to X$ cu proprietatea că

$$\|f\| = \sup_{\omega \in \Omega} \|f(\omega)\| < \infty.$$

Mulţimea $F_m(\Omega, X)$, înzestrată cu operaţiile uzuale [deci $(f_1 + f_2)(\omega) = f_1(\omega) + f_2(\omega)$ şi $(\lambda f)(\omega) = \lambda f(\omega)$ oricare ar fi $f, f_1, f_2 \in F_m(\Omega, X)$, $\lambda \in \mathbf{C}$ şi $\omega \in \Omega$], devine spaţiu liniar.

(i) Arătaţi că aplicaţia $f \to \|f\|$, definită mai sus, este o normă pe $F_m(\Omega, X)$.

(ii) Arătaţi că $F_m(\Omega, X)$ este un spaţiu Banach.

1.7.3. Fie Ω un spaţiu topologic. În acest caz, spaţiul $B_e(\Omega, X)$ (definiţia 1.1.1) este un subspaţiu al spaţiului $F_m(\Omega, X)$, care nu este neapărat închis. Utilizînd exerciţiul 1.7.1, arătaţi că închiderea spaţiului $B_e(\Omega, X)$ în $F_m(\Omega, X)$ (definit la 1.7.2) coincide cu spaţiul $B(\Omega, X)$ (definiţia 1.4.4).

1.7.4. Fie X, Y spații Banach și fie Ω un spațiu topologic. Vom considera o funcție $f \in B(\Omega, X \times Y)$. Dacă f_1 este proiecția funcției f pe prima componentă și f_2 este proiecția lui f pe a doua componentă, atunci $f_1 \in B(\Omega, X)$, $f_2 \in B(\Omega, Y)$ și

$$\int_S f \, d\mu = \left(\int_S f_1 \, d\mu, \int_S f_2 \, d\mu \right)$$

oricare ar fi $\mu \in M(\Omega)$ și $S \in \mathrm{Bor}(\Omega)$.

Indicație. Afirmațiile se obțin ușor pentru funcții etajate. Afirmațiile generale se deduc apoi prin aproximare cu funcții etajate.

1.7.5. Fie $\Omega = [0, 1]$ și fie $X = Y = C(\Omega)$. Vom considera operatorul liniar T cu domeniul de definiție

$$D(T) = \{f \in C(\Omega) ; \ f' \in C(\Omega)\},$$

unde f' este derivata funcției f, dat de formula $Tf = f'$.

(i) Arătați că operatorul T este închis.

Fie apoi $\varphi : \Omega \times \Omega \to \mathbf{C}$ o funcție continuă cu proprietatea că $\partial\varphi(s, t)/\partial t$ există și este continuă.

(ii) Utilizînd teorema 1.1.6, stabiliți formula

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_0^1 \varphi(s, t) \, \mathrm{d}s = \int_0^1 \frac{\partial \varphi(s, t)}{\partial t} \, \mathrm{d}s.$$

1.7.6. Fie Ω un spațiu topologic compact. Arătați că spațiul $C(\Omega, X)$ (definiția 1.1.5) este un subspațiu închis al spațiului $F_m(\Omega, X)$ (exercițiul 1.7.2), deci este el însuși un spațiu Banach.

1.7.7. Fie Ω un spațiu metric compact și fie $\mu : \mathrm{Bor}(\Omega) \to \mathbf{C}$ o funcție numărabil aditivă de mulțime (definiția 0.4.3), nu neapărat regulată. Vom presupune (pentru simplitate) că $\mu(S) \geqslant 0$ oricare ar fi $S \subset \mathrm{Bor}(\Omega)$, deci că μ este o aplicație pozitivă.

(i) Urmărind schema din demonstrația lemei 1.1.3 și a propoziției 1.1.5, arătați că există o aplicație $B(\Omega) \ni f \to \int f \, d\mu \in \mathbf{C}$ cu proprietatea că $\left| \int f \, d\mu \right| \leqslant \|f\| \mu(\Omega)$ (cu alte cuvinte, regularitatea nu este necesară în construcția integralei).

(ii) Fie $f \in B(\Omega)$ o funcție pozitivă. Arătați că se poate alege un șir de funcții pozitive $\{f_k\}_k \subset B_c(\Omega)$ care să conveargă în $B(\Omega)$ către funcția f. Deduceți de aici că $\int f \, d\mu \geqslant 0$.

Din cele menționate mai sus, rezultă, în particular, că aplicația

$$\varphi(f) = \int f \, d\mu, \quad f \in C(\Omega)$$

este o funcțională liniară, continuă și pozitivă. În baza teoremei 0.4.19, există $\nu \in M(\Omega)$, $\nu \geqslant 0$, astfel încît $\varphi(f) = \int f \, d\nu$ pentru orice $f \in C(\Omega)$.

Fie d metrica spațiului Ω (definiția 0.1.9) și fie K o parte compactă a lui Ω. Vom considera șirul de mulțimi

$$G_n = \{\omega \in \Omega : d(\omega, K) < n^{-1}\}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

unde $d(\omega, K) = \inf_{\omega' \in K} d(\omega, \omega')$.

(iii) Arătați că $\{G_n\}_n$ este un șir descrescător de mulțimi deschise, astfel încît $\bigcap \{G_n : n \geqslant 1\} = K$.

(iv) Utilizînd aditivitatea numărabilă a funcției μ, obțineți din (iii) faptul că $\mu(G_n) \to \mu(K)$ $(n \to \infty)$.

Din (iv) rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există o mulțime deschisă $G \supset K$ astfel încît $\mu(G) - \mu(K) < \varepsilon$. O afirmație asemănătoare are loc și pentru măsura pozitivă ν (fie din același argument, fie din regularitatea lui ν). Vom alege apoi o funcție $f \in C(\Omega)$ cu următoarele proprietăți: $0 \leqslant f \leqslant 1$, $f = 1$ pe K și $f = 0$ pe $\Omega \setminus G$.

(v) Arătați că funcția f definită de relația

$$f(\omega) = d(\omega, \Omega \setminus G)(d(\omega, K) + d(\omega, \Omega \setminus G))^{-1}, \quad \omega \in \Omega,$$

îndeplinește condițiile cerute.

(vi) Utilizînd egalitatea $\int f d\mu = \int f \, d\nu$, deduceți că $|\mu(K) - \nu(K)| < 2\varepsilon$. Numărul $\varepsilon > 0$ fiind arbitrar, am obținut egalitatea $\mu(K) = \nu(K)$ pentru orice parte compactă $K \subset \Omega$.

(vii) Pe baza punctului precedent deduceți că $\mu(G) = \nu(G)$, pentru orice parte deschisă $G \subset \Omega$.

(viii) În sfîrșit, utilizînd regularitatea măsurii ν, obțineți pe baza celor de mai sus că $\mu(S) = \nu(S)$ pentru orice parte boreliană $S \in \mathrm{Bor}(\Omega)$.

Concluzie. Pe un spațiu metric compact, orice funcție numărabil aditivă de mulțime este regulată. Am obținut afirmația numai pentru funcții numărabil aditive de mulțime care sînt pozitive. Afirmația generală are loc deoarece orice funcție numărabil aditivă este o combinație liniară de funcții numărabil aditive care sînt și pozitive. Pentru detalii se poate consulta [8], cap. III).

1.7.8. Fie Ω_1, Ω_2 spații metrice compacte și fie $\tau : \Omega_1 \to \Omega_2$ o funcție boreliană (definiția 1.1.9). Fie apoi $\mu_1 \in M(\Omega_1)$. Vom defini aplicația

$$\mu_2(S) = \mu_1(\tau^{-1}(S)), \qquad S \in \mathrm{Bor}(\Omega_2).$$

(i) Arătați că μ_2 este o funcție numărabil aditivă de mulțime.

În baza discuției de la 1.7.7 rezultă că $\mu_2 \in M(\Omega_2)$.

(ii) Fie apoi $f \in B_c(\Omega_2, X)$, unde X este un spațiu Banach. Arătați că $f \circ \tau \in B_c(\Omega_1, X)$ și că

$$\int_{\Omega_2} f(\omega_2) \, d\mu_2(\omega_2) = \int_{\Omega_1} (f \circ \tau)(\omega_1) \, d\mu_1(\omega_1).$$

(iii) Arătați că formula de la (ii) are loc pentru orice funcție $f \in B(\Omega_2, X)$.

Ceea ce am obținut mai sus este o versiune a *formulei schimbării variabilei de integrare.*

În legătură cu definițiile 1.2.7, ne va interesa un caz particular al formulei schimbării variabilei de integrare.

Fie $\xi : [s_0, s_1] \to \mathbf{C}$ o funcție continuă, cu variație mărginită și fie $\tau : [s_0, s_1] \to [t_0, t_1]$ o funcție continuă, strict crescătoare. Atunci τ este bijectivă, deci putem defini funcția $\eta(t) = \xi \circ \tau^{-1}(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$. Funcția η este și ea continuă, cu variație mărginită. Fie μ_1 măsura Lebesgue-Stieltjes asociată cu funcția ξ și fie μ_2 măsura Lebesgue-Stieltjes asociată cu funcția η. Atunci avem relația

$$\mu_2(S) = \mu_1(\tau^{-1}(S)), \quad S \in \mathrm{Bor}([t_0, t_1]).$$

Din modul în care se definesc măsurile Lebesgue- Stieltjes, egalitatea aceasta este limpede pentru intervale (deschise, închise, semi-închise). Din teoria generală a extensiei măsurilor, egalitatea va avea loc și pentru mulțimi boreliene arbitrare. În baza comentariilor anterioare, deducem atunci formula

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t) \, d\eta(t) = \int_{s_0}^{s_1} (f \circ \tau)(s) \, d\xi(s),$$

care ne arată în particular, independența de reprezentarea parametrică a integralei curbilinii (detalii privind măsurile Lebesgue-Stieltjes pot fi găsite în [8], cap. III, § 5).

1.7.9. Fie X un spațiu Banach și fie $K \subset \mathbf{C}$ o mulțime compactă. Vom considera spațiul Banach $C(K, X)$. Pentru fiecare funcție $f \in C(K, X)$ vom defini mulțimea

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{w \in K : f(w) \neq 0\}},$$

mulțime cunoscută sub numele de *suportul* funcției f. Vom defini apoi o funcție $F : \mathbf{C} \setminus \operatorname{supp} f \to C(K, X)$ prin relația

$$F(z)(w) = (w - z)^{-1} f(w), \quad w \in K, \quad z \in \mathbf{C} \setminus \operatorname{supp} f,$$

în care punem $F(z)(w) = 0$ ori de cîte ori $w \notin \operatorname{supp} f$.

(i) Fie $U = \mathbf{C} \setminus \operatorname{supp} f$ și fie $z_0 \in U$. Arătați că există un număr $d_0 > 0$ astfel încît seria

$$(w - z)^{-1} = (w - z_0)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (z - z_0)^k (w - z_0)^{-k}$$

să conveargă pentru $|z - z_0| < d_0$, convergența fiind uniformă în $w \in \operatorname{supp} f$.

(ii) Vom defini funcțiile $f_k(w) = (w - z_0)^{-k-1} f(w)$ (extinse cu zero în afara suportului lui f). Atunci avem reprezentarea

$$F(z)(w) = \sum_{k=0}^{\infty} (z - z_0)^k f_k(w), \quad |z - z_0| < d_0, \quad w \in K,$$

convergența avînd loc în topologia lui $C(K, X)$. Arătați această convergență și obțineți de aici analiticitatea funcției F în U.

(iii) Considerînd în locul spațiului $C(K, X)$ spațiul $B(L, X)$, unde $L \subset \mathbf{C}$ este o mulțime închisă arbitrară, obțineți, ca mai sus, analiticitatea funcției $F : \mathbf{C} \setminus \operatorname{supp} f \to B(L, X)$, definită printr-o formulă asemănătoare, unde $f \in B(L, X)$.

1.7.10. Fie B o algebră Banach cu unitate, fie $a \in B$ un element fixat și fie $[\mathscr{A}_a]$ familia claselor de echivalență de funcții analitice, egale în vecinătăți ale mulțimilor $\sigma_B(a)$. Arătați că $[\mathscr{A}_a]$ este algebră cu unitate, cu operațiile definite în observația 1.3.11.

1.7.11. Fie B o algebră Banach comutativă, cu unitate și fie $a \in B$ un element fixat. Vom nota cu $\mathscr{A}_{a,B}$ familia funcțiilor analitice $f : U_f \to B$, unde $U_f \supset \sigma_B(a)$ este o mulțime deschisă din planul complex. Ca și în observația 1.3.11, în familia $\mathscr{A}_{a,B}$ se poate introduce o relație de echivalență între funcțiile egale într-o vecinătate a mulțimii $\sigma_B(a)$. Fie $[\mathscr{A}_{a,B}]$ mulțimea claselor de echivalență.

(i) Arătați că $[\mathscr{A}_{a,B}]$ se poate organiza ca algebră comutativă, cu unitate (a se vedea și exercițiul 1.7.10), care conține o subalgebră izomorfă cu $[\mathscr{A}_a]$.

(ii) Utilizînd o variantă a formulei (1.3.3), definiți o aplicație $[\mathscr{A}_{a,B}] \ni [f] \to [f](a) \in B$ și arătați că ea este un omomorfism continuu de algebre cu unitate (urmărind etapele demonstrației teoremei 1.3.12), care extinde omomorfismul (1.3.4).

1.7.12. Să se enunțe și să se demonstreze o variantă a propoziției 1.4.3, în care funcția f să fie analitică doar în discul $D_r = \{z : |z| < r\}$, unde $r > r(a)$.

1.7.13. Fie $K \subset \mathbf{C}$ o mulțime compactă. Vom nota cu $\mathscr{A}(K)$ subspațiul liniar al spațiului $C(K)$ format din acele funcții care sînt analitice în vecinătăți ale lui K. Fie apoi $\mathscr{R}(K)$ mulțimea funcțiilor raționale, cu polii situați în afara mulțimii K. Evident, $\mathscr{R}(K) \subset \mathscr{A}(K)$.

Arătați că subspațiile $\mathscr{R}(K)$ și $\mathscr{A}(K)$ au aceeași închidere în $C(K)$. În particular, orice funcție analitică într-o vecinătate a mulțimii K este limita uniformă pe K a unui șir de funcții raționale, cu polii situații în afara lui K.

Indicație: Fie $\mu \in M(K)$ cu proprietatea că $\int R(z)\, d\mu(z) = 0$ pentru orice $R \in \mathscr{R}(K)$. Utilizînd reprezentarea funcției $f \in \mathscr{A}(K)$ prin formula Cauchy precum și teorema lui Fubini, deduceți de aici că $\int f(z)\, d\mu(z) = 0$. Deoarece $M(K)$ este dualul spațiului $C(K)$ (teorema 0.4.19), în virtutea teoremei Hahn-Banach spațiile $\mathscr{R}(K)$ și $\mathscr{A}(K)$ trebuie să aibă aceeași închidere în $C(K)$.

1.7.14. Fie B o algebră Banach cu unitate, fie $a \in B$ un element fixat și fie $\Phi : [\mathscr{A}_a] \to B$ un omomorfism continuu de algebre cu unitate, astfel încît $\Phi(\nu) = a$, unde $\nu(z) = z$.

(i) Arătați că pentru orice $R \in \mathscr{A}_a$ avem egalitatea $\Phi(R) = R(a)$.

(ii) Pe baza continuității lui Φ și a observațiilor de la 1.7.13, arătați că $\Phi([f]) = f(a)$ oricare ar fi $f \in \mathscr{A}_a$.

Acest rezultat dovedește că există un singur calcul funcțional analitic atașat unul element $a \in B$.

1.7.15. Fie B o algebră Banach comutativă, cu unitate și fie $a \in B$ un element fixat.

(i) Arătați egalitatea $\gamma(f(a)) = f(\gamma(a))$ oricare ar fi $\gamma \in \Gamma(B)$.

(ii) Utilizînd propoziția 0.5.6, deduceți din (i) o versiune a teoremei 1.4.1.

1.7.16. Fie X_j spații Banach și fie $T_j \in \mathscr{L}(X_j)$ $(j = 1, 2)$. Fie apoi $X = X_1 \times X_2$ și $T = T_1 \times T_2$ [deci $T((x_1, x_2)) = (T_1x_1, T_2x_2)$ pentru orice $x_1 \in X_1$ și $x_2 \in X_2$]. Arătați atunci că $\sigma(T, X) = \sigma(T_1, X_1) \cup \sigma(T_2, X_2)$.

1.7.17. Fie X un spațiu Banach și fie $T \in \mathscr{L}(X)$ astfel încît $\sigma(T, X) = K_1 \cup K_2$, unde K_1, K_2 sînt mulțimi compacte și disjuncte. Arătați că dacă $X = X_1 + X_2$, unde X_1, X_2 sînt subspații liniare, închise ale lui X, invariante la acțiunea lui T, cu proprietatea că $\sigma(T, X_j) = K_j$ $(j = 1, 2)$, atunci X_1, X_2 sînt unic determinate.

Existenței unei asemenea descompuneri, dată de teorema 1.5.2, îi putem deci adăuga și unicitatea.

Indicație. Fie $X = Y_1 + Y_2$, unde Y_j are aceleași proprietăți ca și X_j. Vom lua un element arbitrar $y_1 \in Y_1$ și-l vom scrie sub forma $y_1 = x_1 + x_2$, unde $x_j \in X_j$. Vom considera apoi funcția

$$f(z) = \begin{cases} (z - T|X_2)^{-1} x_2, & \text{dacă } z \notin K_2, \\ (z - T|Y_1)^{-1} y_1 - (z - T|X_1)^{-1} x_1, & \text{dacă } z \notin K_1. \end{cases}$$

Se vede ușor că funcția f este corect definită și analitică în tot planul complex. Funcția f fiind nulă la infinit, va trebui ca $f(z) \equiv 0$, deci $x_2 = 0$. Așadar, $Y_1 \subset X_1$ iar schimbarea rolurilor celor două spații ne dă și incluziunea inversă. Analog $Y_2 = X_2$.

1.7.18. Fie spațiul Banach $X = C([0, 1])$ și fie operatorul liniar $(Tf)(s) = f'(s)$ (f' fiind derivata lui f).

(i) Dacă $D(T) = \{f \in X : f' \in X\}$, operatorul T este închis (exercițiul 1.7.5); arătați că $\sigma(T, X) = \mathbf{C}$.

Indicație. Arătați că $\lambda - T$ nu este injectiv pentru fiecare $\lambda \in \mathbf{C}$.

(ii) Dacă $D(T) = \{f \in X : f' \in X,\ f(0) = 0\}$, arătați că T este închis și că $\sigma(T, X) = \emptyset$.

Indicație. Arătați că

$$(\lambda - T)^{-1} g(s) = -e^{\lambda s} \int_0^s e^{-\lambda t} g(t)\, dt, \quad g \in X,$$

oricare ar fi $\lambda \in \mathbf{C}$.

1.7.19. Fie $K \subset \mathbf{C}_\infty$ o submulțime compactă, $K \ni \infty$. Vom nota (ca la 1.7.13) cu $\mathscr{A}(K)$ subspațiul liniar al spațiului $C(K)$ format din funcțiile care sînt analitice în vecinătatea mulțimii K (deci analitice și la infinit). Vom nota apoi cu $\mathscr{R}(K)$ subspațiul lui $\mathscr{A}(K)$ format din funcțiile rațională (analitice la infinit) care au polii în afara mulțimii K.

Utilizînd ideea de la 1.7.13, arătați că orice funcție din $\mathscr{A}(K)$ este limita uniformă pe mulțimea K a unui șir de funcții din $\mathscr{R}(K)$.

1.7.20. Fie $T \in \mathscr{C}(X) \setminus \mathscr{L}(X)$ și fie $\Phi : [\mathscr{A}_T] \to \mathscr{L}(X)$ un omomorfism continuu de algebre cu unitate (convergența în $[\mathscr{A}_T]$ și continuitatea aplicațiilor definite pe $[\mathscr{A}_T]$ se definesc la fel ca în observația 1.3.11, mulțimile compacte din $\mathbf{C}$ fiind înlocuite cu mulțimi compacte din $\mathbf{C}_\infty$).

Vom mai presupune că omomorfismul Φ are următoarea proprietate:

Dacă $f \in \mathscr{A}_T$, $f(\infty) \neq 0$, și dacă $g(z)=zf(z)$, atunci $\Phi([f])X \subset D(T)$, $\Phi([g])=T\Phi([f])$ și $T\Phi([f])\,x = \Phi([f])\,Tx$ pentru orice $x \in D(T)$.

(i) Arătați că pentru orice punct $w \notin \sigma_\infty(T, X)$, dacă $f_w(z) = (w-z)^{-1}$, atunci $\Phi([f_w])= = (w - T)^{-1}$.

(ii) Folosind (i), rezultatul de aproximare de la 1.7.19 și continuitatea lui Φ, arătați că $\Phi([f]) = f(T)$ oricare ar fi $f \in \mathscr{A}_T$.

Așadar, și în cazul operatorilor nemărginiți (a se vedea și exercițiul 1.7.14) calculul funcțional analitic este unic determinat, prin condiții naturale.

1.7.21. Fie $T \in \mathscr{C}(X)$ și să presupunem că $\sigma_\infty(T, X) = K \cup K_\infty$, unde $K \subset \mathbf{C}$ este compactă, $K_\infty \subset \mathbf{C}_\infty$ este compactă și $K \cap K_\infty = \emptyset$. Fie $P \in \mathscr{L}(X)$ un proiector cu următoarele proprietăți:

(1) $P(X) \subset D(T)$ și $TPx = PTx$ pentru orice $x \in D(T)$;

(2) $\sigma(T, P(X)) = K$ și $\sigma_\infty(T, (1 - P)(X)) = K_\infty$.

(A doua condiție are nevoie de cîteva explicații. În primul rînd, deoarece $P(X) \subset D(T)$, avem $T|P(X) \in \mathscr{L}(P(X))$. În ceea ce privește spațiul $(1 - P)(X)$, operatorul $T|(1-P)(X)$ este definit pe $D(T) \cap (1 - P)(X)$ și are valori în $(1 - P)(X)$, datorită condiției (1)).

Arătați atunci egalitatea $P = P_K$ (ultimul fiind dat de propoziția 1.6.12).

Acest rezultat asigură unicitatea proiectorului P_K, ce va fi numit *proiectorul spectral* atașat operatorului T și mulțimii K.

Indicație. Fie un punct $w \notin \sigma_\infty(T, X)$ și fie operatorul $A = (w - T)^{-1}$ (ca în demonstrația propoziției 1.6.12). Din condiția (1) rezultă ușor că $PA = AP$, deci că A invariază spațiile $P(X)$ și $(1 - P)(X)$. Dacă $\varphi(z) = (w - z)^{-1}$, se demonstrează apoi că $A|P(X) = \varphi(T|P(X))$ (a se vedea și demonstrația propoziției 1.6.12) și că $A|(1 - P)(X) = \varphi(T|(1 - P)(X))$. În baza teoremei aplicației spectrului, avem atunci că $\sigma(A, P(X)) = \varphi(K)$ și $\sigma(A, (1 - P)(X)) = \varphi(K_\infty)$. Din exercițiul 1.7.17 va rezulta că P este exact proiectorul spectral atașat operatorului A și mulțimii $\varphi(K)$. Din demonstrația propoziției 1.6.12, acesta este chiar proiectorul P_K.

1.7.22. Fie X un spațiu Banach, fie $U \subset \mathbf{C}$ o mulțime deschisă și fie $f \in A(U, X)$.

Vom spune că un punct $w \in \partial U$ este *regulat* pentru funcția f dacă există o vecinătate deschisă W a lui w și o funcție $g_w \in A(W, X)$ astfel încît $f|U \cap W = g_w|U \cap W$. Un punct $w \in \partial U$ care nu este regulat se va numi *punct singular* sau *singularitate* a funcției f.

Fie $z_0 \in U$ și să reamintim că în vecinătatea lui z_0 funcția f admite dezvoltarea în serie

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (z - z_0)^k x_k, \quad |z - z_0| < r_0,$$

unde presupunem r_0 finit, dat de relația

$$r_0^{-1} = \overline{\lim_{k \to \infty}} \, \| x_k \|^{1/k}.$$

Arătați că pe frontiera discului $D(z_0, r_0) = \{z;\ |z - z_0| < r_0\}$ funcția f are cel puțin o singularitate.

Indicație. Dacă toate punctele din $\partial D(z_0, r_0)$ ar fi regulate, funcția f ar putea fi prelungită analitic într-un disc $D(z_0, r)$, unde $r > r_0$. Vom alege numerele r_1, r_2 astfel încît $r_0 < r_1 < r_2 < r$. Notînd cu f prelungirea funcției inițiale la $D(z_0, r)$, din dezvoltarea în serie

$$(w - z)^{-1} = (w - z_0)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (z - z_0)^k (w - z_0)^{-k},$$

în care $w \in \Gamma_2 = \partial D(z_0, r_2)$ și $z \in D(z_0, r_1)$ (a se vedea și exercițiul 1.7.9(ii)), prin utilizarea formulei Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} (w - z)^{-1} f(w)\, dw, \quad z \in D(z_0, r_2),$$

se poate deduce reprezentarea

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (z - z_0)^k y_k, \quad z \in D(z_0, r_1),$$

în care

$$(*) \quad y_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} (w - z_0)^{-k-1} f(w)\, dw.$$

Din relația (*) se obține apoi că $\|y_k\| \leqslant M r_2^{-k}$, unde $M \geqslant 0$ nu depinde de k. Așadar

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \|y_k\|^{1/k} \leqslant r_2^{-1} < r_0^{-1} = \lim_{k\to\infty} \|x_k\|^{1/k}.$$

Pe de altă parte, va trebui să avem $y_k = x_k (k \geqslant 0)$, deoarece reprezentarea funcției f ca serie convergentă în vecinătatea punctului z_0 este unic determinată (formula (*) determină în mod unic coeficienții dezvoltării în serie). Contradicția obținută ne arată că pe mulțimea $\partial D(z_0, r_0)$ se află cel puțin un punct singular al funcției f.

1.7.23. Fie B o algebră Banach cu unitate. Utilizînd exercițiul 1.7.22, arătați că pentru orice element $b \in B$ are loc egalitatea

$$\sup \{|z| ;\ z \in \sigma_B(b)\} = \lim_{k\to\infty} \|b^k\|^{1/k}.$$

Indicație. Deoarece funcția $z \to (z - b)^{-1}$ este analitică în afara celui mai mic disc cu centrul în origine care conține spectrul, din exercițiul 1.7.22 se obține egalitatea

$$\sup \{|z| ;\ z \in \sigma_B(b)\} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \|b^k\|^{1/k}.$$

Pe de altă parte, dacă $z \in \sigma_B(b)$, atunci $z^k \in \sigma_B(b^k)$ (teorema 1.4.1). De aici se deduce că

$$\sup \{|z| ;\ z \in \sigma_B(b)\} \leqslant \overline{\lim_{k\to\infty}} \|b^k\|^{1/k}.$$

Acest rezultat ne arată că raza spectrală se poate obține ca o limită obișnuită.

2. DESCOMPUNEREA SPECTRALĂ A OPERATORILOR NORMALI

Acest capitol este consacrat studiului reprezentării integrale a operatorilor normali în spații Hilbert. O extensie a conceptului de operator normal va fi de asemenea studiată.

2.1. C*-ALGEBRE

Fie B o algebră asociativă. Reamintim că o aplicație $B \ni b \to b^* \in B$ se numește *involuție* pe B dacă (i) $(b^*)^* = b$, (ii) $(b_1 + b_2)^* = b_1^* + b_2^*$, (iii) $(\alpha b)^* = \bar{\alpha} b^*$ și (iv) $(b_1 b_2)^* = b_1^* b_2^*$, oricare ar fi $b, b_1, b_2 \in B$ și $\alpha \in \mathbf{C}$ (a se vedea observația 0.3.13). Dacă algebra B are și unitate, atunci $1^* = 1$, deoarece

$$1^* b = 1^*(b^*)^* = (b^* 1)^* = (b^*)^* = b = b1^*,$$

oricare ar fi $b \in B$.

2.1.1. DEFINIȚIE. Fie B o algebră Banach cu involuție. Vom spune că B este o C*-*algebră* dacă $\| b \|^2 = \| b^* b \|$, oricare ar fi $b \in B$.

Să observăm că dacă B este o C*-algebră cu unitate, atunci din $\| 1 \|^2 = \| 1^* 1 \| = \| 1 \|$ deducem că $\| 1 \| = 1$. Este de asemenea simplu de văzut că $\| b^* \| = \| b \|$, oricare ar fi $b \in B$.

2.1.2. EXEMPLE. 1° Fie Ω un spațiu topologic și fie $B(\Omega)$ algebra Banach a funcțiilor boreliene, mărginite pe Ω, cu valori complexe (exemplul 0.5.2.2°). Aplicația $f \to \bar{f}$, în care $\bar{f}(\omega) = \overline{f(\omega)}$ $(\omega \in \Omega)$, este o involuție pe $B(\Omega)$. Condiția din definiția 2.1.1 fiind evident îndeplinită, putem spun că $B(\Omega)$ este o C*-algebră.

2° Fie Ω un spațiu topologic compact și fie $C(\Omega)$ algebra Banach a funcțiilor continue pe Ω (exemplul 0.5.2.3°). Algebra $C(\Omega)$ este invariantă la involuția indusă de $B(\Omega)$. Este deci clar că $C(\Omega)$ este o C*-algebră și anume o sub-C*-algebră a C*-algebrei $B(\Omega)$ (definiția 2.1.8).

3° Fie H un spațiu Hilbert. Algebra $\mathscr{L}(H)$ are o involuție naturală, dată de trecerea la adjunct (observația 0.3.13). Dotată cu această invo-

luție, algebra $\mathscr{L}(H)$ devine o C*-algebră. Într-adevăr, dacă $T \in L(H)$, atunci $\|T^*\| = \|T\|$ (a se vedea 0.3), prin urmare $\|T^*T\| \leqslant \|T^*\| \, \|T\| = \|T\|^2$. Reciproc,

$$\|T\|^2 = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Tx\|^2 = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \langle T^*Tx, x \rangle \leqslant \|T^*T\|$$

în baza inegalității lui Schwarz (observația 0.2.5); prin urmare, $\|T\|^2 = \|T^*T\|$ oricare ar fi $T \in \mathscr{L}(H)$.

2.1.3. DEFINIȚIE. Fie B_1, B_2 două C*-algebre. Fie φ un omomorfism al algebrei B_1 în algebra B_2. Vom spune că φ este un *omomorfism de C*-algebre* dacă $\varphi(b^*) = \varphi(b)^*$, oricare ar fi $b \in B_1$.

Să remarcăm că în definiția 2.1.3 omomorfismul φ nu este presupus continuu. Continuitatea sa rezultă automat, pe baza afirmației care urmează.

2.1.4. PROPOZIȚIE. *Fie B_1, B_2 două C*-algebre și fie $\varphi : B_1 \to B_2$ un omomorfism de C*-algebre. Atunci $\|\varphi(b)\| \leqslant \|b\|$, oricare ar fi $b \in B_1$.*

Demonstrație. Fie, mai întîi, un element $a \in B_1$ astfel încît $a = a^*$. Atunci $\|a^2\| = \|a^*a\| = \|a\|^2$, deci, prin inducție,

$$\|a^{2^n}\|^{2^{-n}} = \|a\|, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

În baza exercițiului 1.7.23, obținem că $r(a) = \|a\|$.

Fie $b \in B_1$ un element arbitrar. Deoarece

$$\sigma_{B_2}(\varphi(b)) \subset \sigma_{B_1}(b)$$

(propoziția 1.4.5), avem $r(\varphi(b)) \leqslant r(b) \leqslant \|b\|$. Așadar, utilizînd prima parte a demonstrației (aplicată elementului b^*b), putem scrie că

$$\|\varphi(b)\|^2 = \|\varphi(b^*b)\| = r(\varphi(b^*b)) \leqslant \|b^*b\| = \|b\|^2,$$

adică afirmația noastră.

Ne vom ocupa în continuare de unele proprietăți ale C*-algebrelor comutative. Reamintim că dacă B este o algebră Banach comutativă, cu unitate, simbolul $\Gamma(B)$ desemnează spațiul caracterelor algebrei B (definiția 0.5.5), care este un spațiu topologic compact (propoziția 0.5.7).

2.1.5. LEMĂ. *Fie B o C*-algebră comutativă, cu unitate. Atunci $\gamma(b^*) = \overline{\gamma(b)}$, oricare ar fi $b \in B$ și $\gamma \in \Gamma(B)$.*

Demonstrație. Fie, mai întîi, $a = a^* \in B$. Să remarcăm că pentru orice $t \in \mathbf{R}$, în virtutea continuității involuției putem scrie

$$(e^{ita})^* = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ita)^k}{k!}\right]^* = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-ita)^k}{k!} = e^{-ita} = (e^{ita})^{-1}$$

(a se vedea exemplul 1.4.4). Această observație ne permite să scriem

$$1 = \|e^{-ita} e^{ita}\| = \|(e^{ita})^* e^{ita}\| = \|e^{ita}\|^2.$$

Fie acum $\gamma \in \Gamma(B)$ un caracter arbitrar. Remarcăm că

$$|e^{i\gamma(a)}| = |\gamma(e^{ita})| \leqslant \|\gamma\| \, \|e^{ita}\| = 1,$$

în baza exercițiului 1.7.15. Așadar, funcția $t \to e^{it\gamma(a)}$ este mărginită pe $\mathbf{R}$. Presupunînd că $\mathrm{Im}\gamma(a) \neq 0$, am obține că $|e^{it\gamma(a)}| = e^{-t\,\mathrm{Im}\gamma(a)}$ este o funcție nemărginită, ceea ce este absurd. Va trebui deci să avem $\mathrm{Im}\gamma(a) = 0$, adică $\gamma(a) \in \mathbf{R}$ dacă $a = a^*$.

Fie acum $b \in B$ un element arbitrar. Vom utiliza reprezentarea $b = a_1 + ia_2$, unde $a_1 = 2^{-1}(b + b^*)$ și $a_2 = (2i)^{-1}(b - b^*)$. Deoarece $a_1^* = a_1$ și $a_2^* = a_2$, în baza primei părți a demonstrației obținem egalitatea dorită:

$$\gamma(b^*) = \gamma(a_1 - ia_2) = \overline{\gamma(a_1 + ia_2)} = \overline{\gamma(b)}.$$

2.1.6. PROPOZIȚIE. *Fie B o C^*-algebră comutativă cu unitate. Există atunci un omomorfism de C^*-algebre de la B în $C(\Gamma(B))$, care este izometrie surjectivă.*

Demonstrație. Teorema 0.5.8 ne furnizează un omomorfism

$$B \ni b \to \hat{b} \in C(\Gamma(B)), \tag{2.1.1}$$

în care $\hat{b}(\gamma) = \gamma(b)$, oricare ar fi $b \in B$ și $\gamma \in \Gamma(B)$. În virtutea lemei 2.1.5 aplicația (2.1.1) este un omomorfism de C^*-algebre. Datorită comutativității algebrei B putem scrie că

$$\|b^2\|^2 = \|(b^2)^*b^2\| = \|(b^*b)^*(b^*b)\| = \|b^*b\|^2 = \|b\|^4,$$

prin urmare, $\|b^2\| = \|b\|^2$, oricare ar fi $b \in B$. În baza teoremei 0.5.8 aplicația (2.1.1) este izometrie.

Fie algebra $\hat{B} = \{\hat{b};\ b \in B\}$. Vom arăta că $\hat{B} = C(\Gamma(B))$. Într-adevăr, $\hat{1} \in \hat{B}$ este funcția identic egală cu 1; dacă $\hat{b} \in \hat{B}$, atunci $\overline{\hat{b}} = \hat{b}^* \in \hat{B}$ și dacă γ_1, γ_2 sînt caractere distincte în $\Gamma(B)$, deci există un element $b_0 \in B$ astfel încît $\hat{b}_0(\gamma_1) = \hat{b}_0(\gamma_2)$. Algebra $\hat{B}$ fiind închisă (căci este imaginea unei C^*-algebre printr-o izometrie), din teorema 0.5.9 obținem egalitatea $\hat{B} = C(\Gamma(B))$, ceea ce încheie demonstrația.

2.1.7. OBSERVAȚIE. Propoziția 2.1.6. ne arată că algebrele B și $C(\Gamma(B))$ sînt izomorfe ca C^*-algebre. Mai precis, dacă B_1, B_2 sînt C^*-algebre și $\varphi: B_1 \to B_2$ este un omomorfism bijectiv de C^*-algebre, atunci $\varphi^{-1}: B_2 \to B_1$ există și este omomorfism de C^*-algebre. În baza propoziției 2.1.4 omomorfismul φ este și izometrie. În acest caz spunem că B_1 și B_2 sînt *izomorfe ca C^*-algebre*.

2.1.8. DEFINIȚII. Fie B o C^*-algebră. O subalgebră Banach B_1 a lui B care este invariantă la involuție (deci este ea însăși o C^*-algebră) se numește *sub-C^*-algebră* a lui B.

Este clar că intersecția unei familii arbitrare de sub-C^*-algebre ale lui B este o sub-C^*-algebră a lui B.

Să presupunem că B are unitate și să fixăm $M \subset B$. Intersecția B_M a tuturor sub-C^*-algebrelor ce conțin pe $M \cup \{1\}$ se numește *sub-C^*-algebra cu unitate* generată de M. Elementele mulțimii M vor fi numite *generatorii* lui B_M.

Rezultatul care încheie acest paragraf se referă la algebrele cu un număr finit de generatori.

2.1.9. TEOREMĂ. *Fie B o C^*-algebră comutativă cu unitate, avînd n generatori. Atunci spațiul $\Gamma(B)$ este omeomorf cu o submulțime compactă $K_B \subset \mathbf{C}^n$. În plus, algebrele B și $C(K_B)$ sînt izomorfe ca C^*-algebre.*

Demonstrație. Fie $M = \{b_1, \ldots, b_n\}$ o familie care generează C*-algebra cu unitate B. Vom considera aplicația $h : \Gamma(B) \to \mathbf{C}^n$ dată de relația

$$h(\gamma) = (\gamma(b_1), \ldots, \gamma(b_n)), \quad \gamma \in \Gamma(B). \tag{2.1.2}$$

Aplicația h fiind evident continuă, imaginea sa $K_B = h(\Gamma(B))$ este o parte compactă în $\mathbf{C}^n$.

Vom demonstra, în primul rînd, că aplicația h este injectivă. Pentru aceasta vom utiliza faptul că algebra B este generată de mulțimea M (definiția 2.1.8). Acest lucru se traduce prin aceea că luînd toate polinoamele complexe de $2n$ variabile

$$P(z_1, \ldots, z_n, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n)$$

și considerînd expresiile de forma

$$P(b_1, \ldots, b_n, b_1^*, \ldots, b_n^*) \tag{2.1.3}$$

(definite fără echivoc datorită comutativității algebrei B), obținem o subalgebră cu involuție densă în B (exercițiul 2.6.1).

Fie acum $\gamma_1\gamma_2 \in \Gamma(B)$ cu proprietatea că $h(\gamma_1) = h(\gamma_2)$; cu alte cuvinte, $\gamma_1(b_j) = \gamma_2(b_j)$ $(j = 1, \ldots, n)$. Remarcăm apoi că

$$\begin{aligned}
&\gamma_1(P(b_1, \ldots, b_n, b_1^*, \ldots, b_n^*)) = \\
&= P(\gamma_1(b_1), \ldots, \gamma_1(b_n), \overline{\gamma_1(b_1)}, \ldots, \overline{\gamma_1(b_n)}) = \\
&= P(\gamma_2(b_1), \ldots, \gamma_2(b_n), \overline{\gamma_2(b_1)}, \ldots, \overline{\gamma_2(b_n)}) = \\
&= \gamma_2(P(b_1, \ldots, b_n, b_1^*, \ldots, b_n^*)).
\end{aligned}$$

Acest calcul ne arată că omomorfismele γ_1 și γ_2 coincid pe expresiile de forma (2.1.3). Deoarece mulțimea acestor expresii este densă în B și caracterele γ_1, γ_2 sînt aplicații continue, rezultă $\gamma_1 = \gamma_2$, adică aplicația h este injectivă. Așadar, aplicația h este un omeomorfism între spațiile topologice $\Gamma(B)$ și K_B (observația 0.1.6.2°).

Omeomorfismul h permite identificarea algebrelor $C(\Gamma(B))$ și $C(K_B)$; mai precis, $C(\Gamma(B))$ și $C(K_B)$ sînt izomorfe ca C*-algebre, prin aplicația

$$C(K_B) \ni f \to f \circ h \in C(\Gamma(B)).$$

Deoarece și algebrele B și $C(\Gamma(B))$ sînt izomorfe ca C*-algebre (propoziția 2.1.7), rezultă că B și $C(K_B)$ sînt izomorfe ca C*-algebre, prin aplicația

$$B \ni b \to \hat{b} \circ h^{-1} \in C(K_B), \tag{2.1.4}$$

ceea ce încheie demonstrația teoremei.

2.2. MĂSURI SPECTRALE ŞI INTEGRARE

Fiind dat un spaţiu Hilbert H, vom nota cu $\mathscr{A}(H)$ mulţimea operatorilor autoadjuncţi din $\mathscr{L}(H)$. Să observăm că $\mathscr{A}(H)$ este un spaţiu liniar peste corpul real. Fie, de asemenea, Ω un spaţiu topologic.

2.2.1. DEFINIŢIE. Prin *măsură spectrală* pe Ω cu valori în $\mathscr{A}(H)$ se înţelege o aplicaţie $E : \mathrm{Bor}(\Omega) \to \mathscr{A}(H)$ avînd următoarele proprietăţi :

(1) $E(\emptyset) = 0$, $E(\Omega) = 1 (= 1_H)$;

(2) $E(S_1 \cap S_2) = E(S_1)E(S_2)$, oricare ar fi $S_1, S_2 \in \mathrm{Bor}\ (\Omega)$;

(3) Dacă $\{S_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathrm{Bor}(\Omega)$ este un şir de mulţimi disjuncte două cîte două, atunci

$$E\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k\right) x = \sum_{k=1}^{\infty} E(S_k)x, \text{ pentru fiecare } x \in H.$$

Din condiţia (2) rezultă (pentru $S_1 = S_2$) că valorile unei măsuri spectrale sînt proiecţii (autoadjuncte), care comută două cîte două.

2.2.2. EXEMPLU. Fie $H = L^2(\mathbf{R})$ spaţiul claselor de funcţii măsurabile (a se vedea [8], III 2.10), egale aproape peste tot, de pătrat integrabil pe $\mathbf{R}$ în raport cu măsura Lebesgue (a se vedea exerciţiul 0.6.23). Pentru fiecare $S \in \mathrm{Bor}(\mathbf{R})$ definim operatorul

$$(E(S)f)(s) = \chi_S(s)\, f(s), \quad s \in \mathbf{R}, \quad f \in L^2(\mathbf{R}),$$

unde, ca şi în celelalte capitole, χ_S desemnează funcţia caracteristică a mulţimii S. Atunci aplicaţia

$$\mathrm{Bor}(\mathbf{R}) \ni S \to E(S) \in \mathscr{A}(L^2(\mathbf{R}))$$

este o măsură spectrală (exerciţiul 2.6.2).

Întorcîndu-ne la definiţia 2.2.1, precizăm că proprietatea (3) se numeşte *aditivitatea numărabilă tare* a măsurilor spectrale. Ea este echivalentă cu o proprietate aparent mai slabă :

2.2.3. LEMĂ. *Fie* $\mathrm{Bor}(\Omega) \ni S \to E(S) \in \mathscr{A}(H)$ *o aplicaţie cu proprietăţile* (1) *şi* (2) *din definiţie* 2.2.1, *precum şi cu următoarea proprietate* :

(3*) *Dacă* $\{S_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathrm{Bor}(\Omega)$ *este un şir de mulţimi disjuncte două cîte două, atunci*

$$\left\langle E\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k\right) x, y \right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle E(S_k)x, y\rangle, \text{ oricare ar fi } x, y \in H.$$

În aceste condiţii aplicaţia E este o măsură spectrală.

Demonstraţie. Vom arăta că (3*) $\Rightarrow$ (3). Pentru aceasta vom nota

$$S = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k, \; v_j = \sum_{k=1}^{j} E(S_k)x,$$

unde $x \in H$ este un vector fixat. Să remarcăm că pentru orice $y \in H$ putem scrie că

$$\lim_{j\to\infty} \langle v_j, y\rangle = \lim_{j\to\infty} \left\langle \sum_{k=1}^{j} E(S_k)x, y \right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle E(S_k)x, y\rangle = \langle E(S)x, y\rangle,$$

în baza relației (3*). Să remarcăm apoi că sistemul de vectori $\{E(S_k)x\}_k$ este ortogonal, deoarece

$$\langle E(S_k)x, E(S_q)x\rangle = \langle E(S_q)E(S_k)x, x\rangle = 0$$

în baza proprietății (2), ori de cîte ori $k \neq q$. Utilizînd teorema lui Pitagora (exercițiul 0.6.8), putem scrie

$$\lim_{j\to\infty} \| v_j\|^2 = \lim_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{j} \|E(S_k)x\|^2 = \lim_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{j} \langle E(S_k)x, x\rangle =$$

$$= \langle E(S)x, x)\rangle = \|E(S)x\|^2.$$

Așadar, șirul $\{v_j\}_j$ converge slab la vectorul $E(S)x$ iar șirul $\{\|v_j\|\}_j$ converge la $\|E(S)x\|$, asigurînd convergența în norma lui H a șirului $\{v_j\}_j$ către vectorul $E(S)x$ (exercițiul 0.6.7), ceea ce este același lucru cu valabilitatea condiției (3) din definiția 2.2.1.

Deoarece condiția (3) din definiția 2.2.1 implică evident condiția (3*) din lema 2.2.3 (care se numește *aditivitatea numărabilă slabă* a măsurii spectrale), rezultă că cele două proprietăți sînt echivalente. Vom denumi ***aditivitate numărabilă*** oricare din aceste două proprietăți echivalente.

O altă proprietate utilă a măsurilor spectrale este dată de rezultatul care urmează.

2.2.4. LEMĂ. *Fie* $\mathrm{Bor}(\Omega) \ni S \to E(S) \in \mathscr{A}(H)$ *o măsură spectrală. Dacă* $\{S_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathrm{Bor}(\Omega)$ *este un șir crescător, atunci* $E(S_k)x \to E(S)x$ *cînd* $k \to \infty$, *oricare ar fi* $x \in H$, *unde* S *este reuniunea familiei* $\{S_k\}_k$.

Demonstrație. Fie $S_1' = S_1$ și $S_k' = S_k \setminus S_{k-1}$ $(k \geqslant 2)$. Atunci $\{S_k'\}_{k=1}^{\infty}$ este un șir de mulțimi disjuncte două cîte două, a căror reuniune este egală cu mulțimea S. În virtutea aditivității numărabile a măsurii spectrale E, avem relațiile

$$\lim_{k\to\infty} E(S_k)x = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} E(S_j')x = E(S)x,$$

deoarece $E(S_j')x = E(S_j)x - E(S_{j-1})x$ pentru orice $j \geqslant 2$.

Cu ajutorul măsurilor spectrale vom putea efectua operația de integrare a funcțiilor boreliene mărginite (scalare). În acest scop vom utiliza o schemă asemănătoare cu cea din paragraful 1.1.

2.2.5. DEFINIȚIE. Fie $\mathrm{Bor}(\Omega) \ni S \to E(S) \in \mathscr{A}(H)$ o măsură spectrală și fie $f \in B_e(\Omega)$ reprezentată ca în exemplul 0.4.9. Vom defini ***integrala*** funcției f în raport cu măsura spectrală E prin relația

$$\int f(\omega)\mathrm{d}E(\omega) = \sum_{j\in J} \alpha_j E(S_j).$$

Dacă $S \in \mathrm{Bor}(\Omega)$, se definește *integrala* funcției f în raport cu măsura E *pe mulțimea* S prin relația

$$\int_S f(\omega)\, \mathrm{d}E(\omega) = \sum_{j \in J} \alpha_j E(S_j \cap S).$$

2.2.6. LEMĂ. *Aplicația* $B_e(\Omega) \ni f \to \int_S f(\omega)\mathrm{d}E(\omega) \in \mathscr{L}(H)$ *este corect definită, liniară și satisface estimarea*

$$\left\| \int_S f(\omega)\mathrm{d}E(\omega) \right\| \leqslant \sup_{\omega \in S} |f(\omega)|.$$

Demonstrație. Să remarcăm că dacă ne dăm o mulțime $L \in \mathrm{Bor}(\Omega)$ care se scrie sub forma $L = \bigcup \{L_k ; k \in K\}$, unde K este o familie finită de indici și $\{L_k\}_{k \in K} \subset \mathrm{Bor}(\Omega)$ este o colecție de mulțimi disjuncte două cîte două, atunci, pe baza definiției 2.2.1 (3), putem scrie, în particular, că

$$E(L) = \sum_{k \in K} E(L_k).$$

Utilizînd această observație putem obține independența integralei de reprezentarea funcției f ca și în cazurile studiate anterior (exercițiul 0.6.21, lema 1.1.3). Vom lăsa această verificare pe seama cititorului, ca și stabilirea liniarității integralei pe $B_e(\Omega)$.

Pentru a obține ultima afirmație, să observăm că sistemul de vectori $\{\alpha_j E(S_j \cap S)x\}_j$ este ortogonal, unde $x \in H$ este fixat. În virtutea teoremei lui Pitagora avem atunci :

$$\left\| \left(\int_S f(\omega)\, \mathrm{d}E(\omega) \right) x \right\|^2 = \left\| \sum_{j \in J} \alpha_j E(S_j \cap S)x \right\|^2 =$$

$$= \sum_{j \in J} |\alpha_j|^2 \|E(S_j \cap S)x\|^2 \leqslant \sup_{\omega \in S} |f(\omega)|^2 \sum_{j \in J} \|E(S_j \cap S)x\|^2 =$$

$$= \|\chi_S f\|^2 \, \|E(S)x\|^2 \leqslant \|\chi_S f\|^2 \, \|x\|^2$$

[în care apare și norma din spațiul $B_e(\Omega)$]. Aceste estimări implică ultima afirmație a lemei.

2.2.7. DEFINIȚIE. Fie $E : \mathrm{Bor}(\Omega) \to \mathscr{A}(H)$ o măsură spectrală și fie $f \in B(\Omega)$. Fie apoi $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset B_e(\Omega)$ un șir care converge către f în $B(\Omega)$. Pentru fiecare $S \in \mathrm{Bor}(\Omega)$ vom defini *integrala* funcției f *pe mulțimea* S în raport cu măsura spectrală E prin formula

$$\int_S f(\omega)\mathrm{d}E(\omega) = \lim_{k \to \infty} \int_S f_k(\omega)\mathrm{d}E(\omega).$$

2.2.8. TEOREMĂ. *Fie* $E : \mathrm{Bor}(\Omega) \to \mathscr{A}(H)$ *o măsură spectrală şi fie* $S \in \mathrm{Bor}(\Omega)$ *o mulţime fixată. Atunci aplicaţia*

$$B(\Omega) \ni f \to \int_S f(\omega)\, \mathrm{d}E(\omega) \in \mathscr{L}(H)$$

este un omomorfism de C-algebre. Dacă* $S = \Omega$, *atunci imaginea unităţii din* $B(\Omega)$ *prin acest omomorfism este identitatea pe* H.

Demonstraţie. Corectitudinea definiţiei aplicaţiei din enunţ (şi deci şi a definiţiei 2.2.7) se obţine ca în demonstraţia proporţiei 1.1.5, pe baza estimării date de lema 2.2.6. Tot ca în propoziţia 1.1.5 se obţine şi liniaritatea aplicaţiei din enunţ. Verificarea acestor fapte o lăsăm pe seama cititorului.

Ne vom ocupa acum de demonstrarea multiplicativităţii aplicaţiei din enunţ. Fie, mai întîi, funcţiile

$$f(\omega) = \sum_{j \in J} \alpha_j \chi_{S_j}(\omega),\ g(\omega) = \sum_{k \in K} \beta_k \chi_{L_k}(\omega)$$

din $B_e(\Omega)$, reprezentate ca în exemplul 0.4.9. Atunci

$$\int_S f(\omega) g(\omega)\, \mathrm{d}E(\omega) = \sum_{j,k} \alpha_j \beta_k E(S \cap S_j \cap L_k) =$$

$$= \sum_j \alpha_j E(S \cap S_i) \sum_k \beta_k E(S \cap L_k) = \int_S f(\omega) \mathrm{d}E(\omega) \int_S g(\omega) \mathrm{d}E(\omega),$$

deci avem multiplicativitate pe subalgebra $B_e(\Omega)$. Dacă f, g sînt funcţii arbitrare din $B(\Omega)$ şi dacă $\{f_m\}_m$, $\{g_m\}_m$ sînt şiruri din $B_e(\Omega)$ care le aproximează (respectiv), atunci, pe baza rezultatului anterior, putem scrie

$$\int_S f(\omega) g(\omega) \mathrm{d}E(\omega) = \lim_{m \to \infty} \int_S f_m(\omega) g_m(\omega)\, \mathrm{d}E(\omega) =$$

$$= \lim_{m \to \infty} \int_S f_m(\omega)\, \mathrm{d}E(\omega) \int_S g_m(\omega)\, \mathrm{d}E(\omega) = \int_S f(\omega)\, \mathrm{d}E(\omega) \int_S g(\omega)\, \mathrm{d}E(\omega),$$

deci aplicaţia din enunţ este omomorfism de algebre Banach. Ea este chiar omomorfism de C*-algebre, deoarece, dacă $f \in B_e(\Omega)$ are reprezentarea din exemplul 0.4.9, atunci

$$\left(\int_S f(\omega) \mathrm{d}E(\omega) \right)^* = \left(\sum_{j \in J} \alpha_j E(S \cap S_j) \right)^* =$$

$$= \sum_{j \in J} \overline{\alpha}_j E(S \cap S_j) = \int_S \overline{f(\omega)}\, \mathrm{d}E(\omega).$$

Egalitatea

$$\left(\int_S f(\omega)\mathrm{d}E(\omega)\right)^* = \int_S \overline{f(\omega)}\,\mathrm{d}E(\omega)$$

se obține apoi pentru orice funcție $f \in B(\Omega)$, aproximînd funcția f cu funcții din $B_e(\Omega)$ și ținînd seama de continuitatea involuției.

În sfîrșit, să remarcăm că imaginea unității din $B(\Omega)$ prin omomorfismul considerat este proiecția $E(S)$. Deci dacă $S = \Omega$, atunci $E(S)$ este operatorul identic pe H, ceea ce încheie demonstrația.

2.2.9. COROLAR. *În condițiile teoremei precedente, operatorul* $N_f = \int f(\omega)\mathrm{d}E(\omega)$ *este normal pentru orice* $f \in B(\Omega)$.

Demonstrație. Deoarece aplicația din teorema precedentă este un omomorfism de C*-algebre definit pe o algebră comutativă, rezultă că $N_f^* = N_{\bar{f}}$ și deci $N_f^* N_f = N_f N_f^*$.

În continuare vom enunța și demonstra *teorema de schimbare de variabilă* pentru măsurile spectrale.

2.2.10. TEOREMĂ. *Fie* Ω_1, Ω_2 *spații topologice, fie* $\tau : \Omega_1 \to \Omega_2$ *o aplicație boreliană și fie* $E_1 : \mathrm{Bor}(\Omega_1) \to \mathscr{A}(H)$ *o măsură spectrală. Atunci aplicația*

$$E_2(S) = E_1(\tau^{-1}(S)), \quad S \in \mathrm{Bor}(\Omega_2) \tag{2.2.1}$$

definește o măsură spectrală pe $\mathrm{Bor}(\Omega_2)$ *pentru care are loc formula*

$$\int_{\Omega_2} f(\omega_2)\,\mathrm{d}E_2(\omega_2) = \int_{\Omega_1} (f \circ \tau)(\omega_1)\mathrm{d}E(\omega_1), \tag{2.2.2}$$

oricare ar fi $f \in B(\Omega_2)$.

Demonstrație. Ideea de demonstrație este aceeași ca în cazul măsurilor scalare (exercițiul 1.7.8). Vom verifica mai întîi că (2.2.1) definește o măsură spectrală. Deoarece aplicația τ este boreliană, preimaginile mulțimilor din $\mathrm{Bor}(\Omega_2)$ sînt mulțimi din $\mathrm{Bor}(\Omega_1)$ (definiția 1.1.9). Evident $E_2(\emptyset) = E_1(\emptyset) = 0$ și $E_2(\Omega_2) = E_1(\Omega_1) = 1$. Apoi, dacă $S_1, S_2 \in \mathrm{Bor}(\Omega_2)$, atunci $\tau^{-1}(S_1 \cap S_2) = \tau^{-1}(S_1) \cap \tau^{-1}(S_2)$, deci $E_2(S_1 \cap S_2) = E_2(S_1)E_2(S_2)$, din proprietatea corespunzătoare a lui E_1. Dacă $\{S_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathrm{Bor}(\Omega_2)$ este un șir de mulțimi disjuncte două cîte două, atunci $\{\tau^{-1}(S_k)\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathrm{Bor}(\Omega_1)$ este un șir de mulțimi disjuncte două cîte două, prin urmare

$$E_2\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k\right)x = E_1\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \tau^{-1}(S_k)\right)x = \sum_{k=1}^{\infty} E_1(\tau^{-1}(S_k))\,x = \sum_{k=1}^{\infty} E_2(S_k)x,$$

oricare ar fi $x \in H$, ceea ce atestă că (2.2.1) este măsură spectrală.

Vom demonstra acum egalitatea (2.2.2). Fie, mai întîi,

$$f = \sum_{j \in J} \alpha_j \chi_{S_j''} \in B_e(\Omega_2),$$

reprezentată ca în exemplul 0.4.9. Notînd $S_j' = \tau^{-1}(S_i'')$, obținem reprezentarea

$$f \circ \tau = \sum_{j \in J} \alpha_j \chi_{S_j'} \in B_e(\Omega_1),$$

deoarece $\chi_S \circ \tau = \chi_{\tau^{-1}(S)}$, oricare ar fi $S \in \mathrm{Bor}(\Omega_2)$. Prin urmare

$$\int_{\Omega_1} (f \circ \tau)(\omega_1) \mathrm{d}E_1(\omega_1) = \sum_{j \in J} \alpha_j E_1(S_j') = \sum_{j \in J} \alpha_j E_2(S_j'') = \int_{\Omega_2} f(\omega_2) \mathrm{d}E(\omega_2).$$

În cazul în care $f \in B(\Omega_2)$ este o funcție arbitrară, vom lua un șir $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset B_e(\Omega_2)$ care converge la f în $B(\Omega_2)$ și vom remarca estimarea

$$\sup_{\omega_1 \in \Omega_1} |f_k(\tau(\omega_1)) - f(\tau(\omega_1))| \leqslant \sup_{\omega_2 \in \Omega_2} |f_k(\omega_2) - f(\omega_2)|.$$

Acest fapt ne arată că șirul $\{f_k \circ \tau\}_k$ converge către $f \circ \tau$ în $B(\Omega_1)$. În plus,

$$\int_{\Omega_1} (f \circ \tau)(\omega_1) \mathrm{d}E_1(\omega_1) = \lim_{k \to \infty} \int_{\Omega_1} (f_k \circ \tau)(\omega_1) \mathrm{d}E_1(\omega_1) =$$

$$= \lim_{k \to \infty} \int_{\Omega_2} f_k(\omega_2) \, \mathrm{d}E_2(\omega_2) = \int_{\Omega_2} f(\omega_2) \mathrm{d}E(\omega_2),$$

ceea ce încheie demonstrația.

2.2.11. OBSERVAȚII. 1° Fie Ω un spațiu metric compact și fie $E : \mathrm{Bor}(\Omega) \to \mathscr{A}(H)$ o măsură spectrală. Pentru fiecare pereche $(x, y) \in H \times H$ vom defini o aplicație

$$\mu_{x,y}(S) = \langle E(S)x, y \rangle, \quad S \in \mathrm{Bor}(\Omega). \tag{2.2.3}$$

În virtutea aditivității numărabile a măsurii spectrale, este limpede că $\mu_{x,y}$ este o măsură pe $\mathrm{Bor}(\Omega)$, în sensul definiției 0.4.3. În baza exercițiului 1.7.7. avem $\mu_{x,y} \in M(\Omega)$, deci măsurile $\mu_{x,y}$ sînt chiar regulate. (Este suficient să obținem regularitatea măsurilor pozitive $\{\mu_{x,x}\}_{x \in H}$, ca în exercițiul 1.7.7. Regularitatea unei măsuri arbitrare $\mu_{x,y}$ se obține apoi prin utilizarea relației de polarizare, enunțată la exercițiul 0.6.11.)

Măsurile $\mu_{x,y}$ date de (2.2.3) vor fi numite *măsurile scalare atașate măsurii spectrale* E. Pentru a sublinia proveniența acestor măsuri, vom mai utiliza notația

$$\int_{\Omega} f(\omega) \mathrm{d} \langle E(\omega)x, y \rangle = \int_{\Omega} f(\omega) \mathrm{d}\mu_{x,x}(\omega), \; f \in B(\Omega). \tag{2.2.4}$$

2° Vom putea aplica observațiile precedente și la condiții ceva mai generale. Anume, fie Ω un spațiu local compact și fie Ω_∞ spațiul compact

care se obține din Ω prin adăugarea punctului ∞ (teorema 0.1.7). Fiind dată o măsură spectrală $E : \mathrm{Bor}(\Omega) \to \mathscr{A}(H)$, aceasta poate fi extinsă la o măsură spectrală $\widetilde{E} : \mathrm{Bor}(\Omega_\infty) \to \mathscr{A}(H)$ punînd $\widetilde{E}(S) = E(S \cap \Omega)$ pentru fiecare $S \in \mathrm{Bor}(\Omega_\infty)$.

Să presupunem că Ω_∞ este spațiu metric (compact). Atunci măsurile $\{\mu_{x,y}\}_{x,y}$ date de formula (2.2.3) sînt încă regulate. Într-adevăr, notînd cu $\tilde{\mu}_{x,y}$ măsura care se obține din $\widetilde{E}$ prin relația (2.2.3), din 1° avem $\tilde{\mu}_{x,y} \in \in \boldsymbol{M}(\Omega_\infty)$. Deoarece $\mu_{x,y} = \tilde{\mu}_{x,y} | \mathrm{Bor}(\Omega)$, obținem și faptul că $\mu_{x,y} \in \in \boldsymbol{M}(\Omega)$.

Vom continua să spunem și în acest caz că $\mu_{x,y}$ sînt măsurile scalare atașate măsurii spectrale E și vom utiliza notația (2.2.4).

3° Situația de la 2° se poate aplica, în particular, planului complex $\mathbf{C}$. Într-adevăr, $\mathbf{C}_\infty$ este omeomorf cu o sferă, deci are structură de spațiu metric compact, echivalentă cu topologia sa naturală (observația 0.1.8).

2.2.12. PROPOZIȚIE. *Fie Ω un spațiu topologic local compact cu proprietatea că topologia spațiului compact Ω_∞ este dată de o metrică. Fie E: $\mathrm{Bor}(\Omega) \to \mathscr{A}(H)$ o măsură spectrală. Atunci măsurile scalare atașate măsurii spectrale E au următoarele proprietăți*:

$$(1) \qquad \int_\Omega f(\omega)\mathrm{d}\langle E(\omega)x, y\rangle = \left\langle \left(\int_\Omega f(\omega)\ \mathrm{d}E(\omega) \right) x, y \right\rangle;$$

$$(2) \qquad \left| \int_\Omega f(\omega)\mathrm{d}\langle E(\omega)x,\ y\rangle \right| \leqslant \|f\|\ \|x\|\ \|y\|;$$

$$(3) \qquad \int_\Omega |f(\omega)|^2\mathrm{d}\langle E(\omega)x, x\rangle = \left\| \left(\int_\Omega f(\omega)\ \mathrm{d}E(\omega) \right) x \right\|^2,$$

oricare ar fi $x, y \in H$ și $f \in B(\Omega)$.

Demonstrație. Dacă f este o funcție etajată, deci

$$f = \sum_{j \in J} \alpha_j \chi_{S_j};$$

atunci

$$\int_\Omega f(\omega)\mathrm{d}\langle E(\omega)x, y\rangle = \sum_{j \in J} \alpha_j \langle E(S_j)x, y\rangle =$$

$$= \langle (\sum_{j \in J} \alpha_j E(S_j))x,\ y\rangle = \left\langle \left(\int_\Omega f(\omega)\ \mathrm{d}E(\omega) \right) x, y \right\rangle.$$

Dacă $f \in B(\Omega)$ este arbitrară, relația (1) se obține pe baza calculului de mai sus, aproximînd funcția f cu un șir de funcții din $B_s(\Omega)$.

Pentru a obține relația (2), vom observa mai întîi estimarea

$$\left\| \int_\Omega f(\omega)\,\mathrm{d}E(\omega) \right\| \leqslant \|f\|,\ f \in B(\Omega), \qquad (2.2.5)$$

consecință a teoremei 2.2.8 și a propoziției 2.1.4 [relația (2.2.5) se poate obține și din estimarea dată de lema 2.2.6, prin trecere la limită]. Folosind egalitatea (1), inegalitatea lui Schwarz și estimarea (2.2.5) deducem ușor proprietatea (2).

Relația (3) se poate obține tot din (1), prin teorema 2.2.8. Într-adevăr

$$\int_\Omega |f(\omega)|^2 \, \mathrm{d}\langle E(\omega)x, y\rangle = \left\langle \int_\Omega |f(\omega)|^2 \mathrm{d}E(\omega)x, \; x \right\rangle =$$

$$= \left\langle \left(\int_\Omega \overline{f(\omega)} \, \mathrm{d}E(\omega) \right) \left(\int_\Omega f(\omega) \, \mathrm{d}E(\omega) \right) x, y \right\rangle =$$

$$= \left\langle \left(\int_\Omega f(\omega) \, \mathrm{d}E(\omega) \right) x, \; \left(\int_\Omega f(\omega) \, \mathrm{d}E(\omega) \right) x \right\rangle = \left\| \left(\int_\Omega f(\omega) \, \mathrm{d}E(\omega) \right) x \right\|^2$$

oricare ar fi $f \in B(\Omega)$ și $x \in H$, ceea ce încheie demonstrația.

2.3. REPREZENTAREA INTEGRALĂ A OPERATORILOR NORMALI

În paragraful precedent am văzut că fiind dată o măsură spectrală, integrala unei funcții scalare în raport cu aceasta este un operator normal (corolarul 2.2.9). Aici ne vom ocupa de problema inversă, anume de reprezentarea unui operator normal arbitrar ca integrală dintr-o funcție scalară în raport cu o măsură spectrală.

Fie H un spațiu Hilbert și fie $N \in \mathscr{L}(H)$ un operator normal fixat. Vom nota cu B_N sub-C*-algebra cu unitate generată de mulțimea $\{N\}$ în $\mathscr{L}(H)$ (definiția 2.1.8).

2.3.1. LEMĂ. *Algebra B_N este o C*-algebră comutativă, cu unitate. În plus, B_N și $C(\sigma_N)$ sînt izomorfe ca C*-algebre, unde $\sigma_N = \sigma_{B_N}(N)$.*

Demonstrație. Faptul că B_N este o C*-algebră comutativă rezultă din exercițiul 2.6.1. Algebra B_N fiind generată de $\{N\}$, aplicația (2.1.2) este dată de $\Gamma(B_N) \ni \gamma \to \gamma(N) \in \sigma_N$, prin egalitatea

$$\{\gamma(N) : \gamma \in \Gamma(B_N)\} = \sigma_{B_N}(N),$$

obținută din propoziția 0.5.6. Din teorema 2.1.9 deducem atunci că B_N și $C(\sigma_N)$ sînt izomorfe ca C*-algebre.

2.3.2. OBSERVAȚIE. Fie $\psi : B_N \to C(\sigma_N)$ izomorfismul dat de lema 2.3.1. Să remarcăm că $\psi(P(N, N^*)) = P|\sigma_N$ pentru orice polinom complex în variabilele z și $\bar{z}$. Acest fapt rezultă prin explicitarea aplicației (2.1.4). Anume, elementul $P(N, N^*)$ corespunde prin (2.1.4) funcției $\widehat{P(N,N^*)} \circ h^{-1}$. Dacă $z \in \sigma_N$, atunci $z = \gamma(N)$ pentru un anume $\gamma \in \Gamma(B_N)$ deci $h^{-1}(z) = \gamma$, deoarece aplicația h [dată de (2.1.2)] este un omeomorfism. Așadar

$$\widehat{P(N, N^*)} \circ h^{-1}(z) = \widehat{P(N, N^*)}(\gamma) = P(\gamma(N), \overline{\gamma(N)}) = P(z, \bar{z}).$$

2.3.3. LEMĂ. *Avem egalitatea* $\sigma(N, H) = \sigma_N$.

Demonstrație. Reamintim egalitatea $\sigma(N, H) = \sigma_{\mathscr{L}(H)}(N)$ (paragraful 1.5) și remarcăm incluziunea $\sigma_{\mathscr{L}(H)}(N) \subset \sigma_N$, deoarece, dacă operatorul $z - N$ este inversabil în B_N, atunci $z - N$ este inversabil și în $\mathscr{L}(H)$. Vom arăta că această incluziune este, de fapt, egalitate. În acest scop vom utiliza izomorfismul $\Phi : C(\sigma_N) \to B_N$, care este inversul izomorfismului ψ din observația 2.3.2. În baza observației 2.1.7, aplicația Φ este și izometrie.

Să presupunem că $\sigma_N \setminus \sigma(N, H) \neq \emptyset$. Vom lua atunci o funcție $f \in C(\sigma_N)$, $f \neq 0$, al cărei suport (exercițiul 1.7.9) să nu intersecteze mulțimea $\sigma(N, H)$ [construcția unei asemenea funcții se poate face ca în exercițiul 1.7.7 (v)]. Deoarece Φ este izometrie, avem $\Phi(f) \neq 0$. Definim apoi funcția $f_w(z) = (w - z)^{-1} f(z)$ ($z \in \sigma_N$, $w \notin \operatorname{supp} f$), în care $f_w(z) = 0$ dacă $z \notin \operatorname{supp} f$. În baza exercițiului 1.7.9, aplicația

$$\mathbf{C} \setminus \operatorname{supp} f \ni w \to f_w \in C(\sigma_N)$$

este analitică. Deci și aplicația

$$\mathbf{C} \setminus \operatorname{supp} f \ni w \to \Phi(f_w) \in \mathscr{L}(H)$$

este analitică (propoziția 1.2.10). Să definim funcția

$$F(w) = \begin{cases} \Phi(f_w) & w \notin \operatorname{supp} f, \\ (w - N)^{-1}\ \Phi(f), & w \notin \sigma(N, H). \end{cases}$$

Funcția F este corect definită, deoarece, dacă $w \notin (\operatorname{supp} f) \cup \sigma(N, H)$, atunci $\Phi(f_w) = (w - N)^{-1}\Phi((f)$. Într-adevăr, dacă $\nu(z) = z$, atunci $\Phi(\nu) = N$ pe baza observației 2.3.2. Apoi, deoarece $(w - \nu)f_w = 1$ iar Φ este omomorfism, avem $(w - N)\Phi(f_w) = 1$. Mai mult decît atît, funcția F este analitică în întreg planul complex și

$$\lim_{w \to \infty} F(w) = \lim_{w \to \infty} (w - N)^{-1}\Phi(f) = 0.$$

Din teorema lui Liouville (teorema (1.2.9) rezultă atunci că $F \equiv 0$. Așadar $\Phi(f) = 0$, ceea ce este absurd. Va trebui deci să avem $\sigma(N, H) = \sigma_N$.

2.3.4 TEOREMĂ. *Fie N un operator normal. Există atunci un omomorfism de* C*-*algebre*

$$C(\sigma(N, H)) \ni f \to f(N) \in \mathscr{A}(H) \tag{2.3.1}$$

cu următoarele proprietăți :

(1) $\|f(N)\| = \|f\|$ *oricare ar fi* $f \in C(\sigma(N, H))$;

(2) *aplicația* (2.3.1) *extinde calculul funcțional analitic al operatorului* N.

Demonstrație. Aplicația (2.3.1) va fi, desigur, omomorfismul Φ din lema precedentă, care are, după cum am văzut, proprietatea (1). Vom arăta că omomorfismul Φ are și proprietatea (2). Mai precis, vom arăta că dacă $f \in \mathscr{A}_N$, atunci $\Phi(f) = f(N)$, unde $f(N)$ este dat de definiția 1.3.8. Acest fapt va rezulta prin explicitarea aplicației (2.1.4). Procedînd ca în observația 2.3.2, dacă $z \in \sigma_N = \sigma(N, H)$ (lema 2.3.3), atunci $z = \gamma(N)$

pentru un $\gamma \in \Gamma(B_N)$; prin urmare, $\widehat{f(N)}(\gamma) = f(z)$, pe baza exercițiului 1.7.15(i). Relația (2.1.4) ne arată atunci că $\psi(f(N)) = f$, deci că $\Phi(f) = f(N)$, ceea ce încheie demonstrația.

Egalitatea $\Phi(f) = f(N)$ pentru f analitică în vecinătatea spectrului lui N îndreptățește notația utilizată la (2.3.1) pentru orice $f \in C(\sigma(N, H))$. Vom vedea în paragraful următor că aplicația (2.3.1) este unic determinată. Teorema 2.3.4 este o etapă importantă în construcția unei măsuri spectrale atașate unui operator normal.

2.3.5 PROPOZIȚIE. *Fie* $\theta : H \times H \to \mathbf{C}$ *o aplicație cu următoarele proprietăți* :

(i) $\theta(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 \theta(x_1, y) + \alpha_2 \theta(x_2, y)$,

(ii) $\theta(y, x) = \overline{\theta(x, y)}$,

(iii) $|\theta(x, y)| \leqslant C\|x\| \, \|y\|$,

oricare ar fi $x, x_1, x_2, y \in H$ *și* $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{C}$, *unde* $C \geqslant 0$ *este o constantă. Există atunci un operator autoadjunct* $A \in \mathscr{L}(H)$ *astfel încît* $\theta(x, y) = \langle Ax, y\rangle$, *oricare ar fi* $x, y \in H$.

Demonstrație. Fie $y \in H$ un element fixat. Din proprietățile aplicației θ rezultă că $H \ni x \to \theta(x, y) \in \mathbf{C}$ este o funcțională liniară și continuă pe H. În baza teoremei 0.3.11 există un vector unic determinat $A(y) \in H$ astfel încît $\theta(x, y) = \langle x, A(y)\rangle$. Deoarece

$$\theta(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \overline{\alpha}_1 \theta(x, y_1) + \overline{\alpha}_2 \theta(x, y_2) =$$

$$= \overline{\alpha}_1 \langle x, A(y_1)\rangle + \overline{\alpha}_2 \langle x, A(y_2)\rangle = \langle x, \alpha_1 A(y_1) + \alpha_2 A(y_2)\rangle,$$

din unicitatea dată de teorema 0.3.11 rezultă că $A(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 A(y_1) + \alpha_2 A(y_2)$ pentru orice $y_1, y_2 \in H$ și $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{C}$, deci A este o aplicație liniară. Tot în virtutea teoremei 0.3.11 obținem

$$\|A(y)\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |\theta(x, y)| \leqslant C\|y\| ;$$

prin urmare, A este o aplicație continuă. În sfîrșit, să remarcăm că

$$\langle A^* x, y\rangle = \langle x, Ay\rangle = \theta(x, y) = \overline{\theta(y, x)} = \overline{\langle y, Ax\rangle} = \langle Ax, y\rangle,$$

adică $A^* = A$.

Rezultatul care urmează este cunoscut și sub denumirea de *teorema spectrală pentru operatorii normali.*

2.3.6. TEOREMĂ. *Fie* $N \in \mathscr{L}(H)$ *un operator normal. Există atunci o măsură spectrală* $E : \mathrm{Bor}(\sigma(N, H)) \to \mathscr{A}(H)$ *astfel încît*

$$N = \int_{\sigma(N,H)} z \, dE(z).$$

Demonstrație. Vom utiliza în mod esențial teorema 2.3.4. Pentru fiecare pereche $x, y \in H$ vom defini aplicația

$$\varphi_{x,y}(f) = \langle f(N)x, y\rangle, \quad f \in C(\sigma(N, H)),$$

unde $f(N)$ este dat de (2.3.1). Deoarece $\|f(N)\| = \|f\|$, avem evaluarea

$$|\varphi_{x,y}(f)| \leqslant \|f\| \, \|x\| \, \|y\|,$$

ceea ce arată ca $\varphi_{x,y} \in C(\sigma(N, H))^*$ pentru fiecare pereche $x, y \in H$. În baza teoremei 0.4.19, există $\mu_{x,y} \in \mathcal{M}(\sigma(N, H))$ astfel încît

$$\varphi_{x,y}(f) = \int_{\sigma(N,H)} f(z) \, d\mu_{x,y}(z), \qquad f \in C(\sigma(N, H)).$$

Fie $S \in \mathrm{Bor}(\sigma(N, H))$ o submulțime fixată. Vom considera aplicația $\theta_S(x, y) : H \times H \to \mathbf{C}$ dată de egalitatea

$$\theta_S(x, y) = \int \chi_S \, d\mu_{x,y}, \quad x, y \in H.$$

Deoarece avem în mod evident

$$\varphi_{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y} = \alpha_1 \varphi_{x_1, y} + \alpha_2 \varphi_{x_2, y},$$

o relație similară are loc și pentru măsuri :

$$\mu_{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y} = \alpha_1 \mu_{x_1, y} + \alpha_2 \mu_{x_2, y},$$

în baza unicității date de teorema 0.4.19. Așadar

(i) $\qquad \theta_S(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 \theta_S(x_1, y) + \alpha_2 \theta_S(x_2, y)$

oricare ar fi $x_1, x_2, y \in H$ și $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{C}$.

Avem apoi că

$$\varphi_{x,y}(f) = \langle f(N) \, x, y \rangle = \langle x, \bar{f}(N) y \rangle = \overline{\langle \bar{f}(N) \, y, x \rangle} = \bar{\varphi}_{y,x}(f),$$

unde $\bar{\varphi}_{y,x}(f) = \overline{\varphi_{y,x}(\bar{f})}$, $f \in C(\sigma(N, H))$. Tot din unicitatea dată de teorema 0.4.19 deducem $\mu_{x,y} = \bar{\mu}_{y,x}$, unde definim

$$\int f \, d\bar{\mu}_{y,x} = \overline{\int \bar{f} \, d\mu_{y,x}}, \quad f \in B(\sigma(N, H)).$$

În particular,

(ii) $\overline{\theta_S(y, x)} = \int \chi_S d\bar{\mu}_{y,x} = \int \chi_S d\mu_{x,y} = \theta_S(x, y),$

oricare ar fi $x, y \in H$. În sfîrșit,

(iii) $|\theta_S(x, y)| \leqslant \|\chi_S\| \|\mu_{x,x}\| \leqslant \|\varphi_{x,y}\| \leqslant \|x\| \, \|y\|,$

deoarece corespondența dată de teorema 0.4.19 este izometrie. Proprietățile (i), (ii), și (iii) ne arată că sînt satisfăcute condițiile propoziției 2.3.5. Aceasta ne asigură existența unui operator autoadjunct $E(S) \in \mathcal{L}(H)$, astfel încît

(iv) $\int \chi_S d\mu_{x,y} = \langle E(S) \, x, y \rangle, \quad x, y \in H.$

În continuare vom arăta că aplicația $S \to E(S)$ este o măsură spectrală. Pentru aceasta vom avea nevoie de relația

(v) $\qquad \chi_S \mu_{x,y} = \mu_{E(S)x,y}, \qquad S \in \mathrm{Bor}(\sigma(N, H)), \qquad x, y \in H.$

Într-adevăr, fie f și g funcții continue pe $\sigma(N, H)$. Atunci

$$\varphi_{x,y}(fg) = \langle f(N)g(N)x, y\rangle = \langle f(N)x, \bar{g}(N)y\rangle = \varphi_{x,\bar{g}(N)y}(f),$$

deci și egalitatea de măsuri $g\mu_{x,y} = \mu_{x,\bar{g}(N)y}$, în baza teoremei 0.4.19. De aici, dacă $S \in \mathrm{Bor}(\sigma(N, H))$, atunci

$$\int \chi_S \, g \, \mathrm{d}\mu_{x,y} = \int \chi_S \mathrm{d}\mu_{x,\bar{g}(N)y} = \langle E(S)x, \bar{g}(N)y\rangle = \langle g(N)E(S)\, x, y\rangle = \int g \, \mathrm{d}\mu_{E(S)x,y},$$

ceea ce probează valabilitatea relației (v).

Folosind egalitatea (v) vom putea scrie

$$\langle E(S_1 \cap S_2)x, y\rangle = \int \chi_{S_1 \cap S_2} \, \mathrm{d}\mu_{x,y} = \int \chi_{S_1}\chi_{S_2} \, \mathrm{d}\mu_{x,y} =$$

$$= \int \chi_{S_1} \, \mathrm{d}\mu_{E(S_2)x,y} = \int \mathrm{d}\mu_{E(S_1)E(S_2)x,y} = \langle E(S_1)\, E(S_2)\, x, y\rangle;$$

așadar $E(S_1 \cap S_2) = E(S_1)\, E(S_2)$ oricare ar fi S_1, $S_2 \in \mathrm{Bor}(\sigma(N, H))$.

Întrucît egalitățile $E(\sigma(N, H)) = 1$ și $E(\emptyset) = 0$ sînt evidente, nerămîne de verificat doar condiția de aditivitate numărabilă. Fie $\{S_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathrm{Bor}(\sigma(N, H))$ o familie numărabilă de mulțimi disjuncte două cîte două. Deoarece $\mu_{x,y}$ este măsură putem scrie

$$\left\langle E\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k\right)x, y\right\rangle = \mu_{x,y}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_{x,y}(S_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle E(S_k)x, y\rangle,$$

ceea ce, în baza lemei 2.2.3, ne arată că aplicația $S \to E(S)$ este o măsură spectrală.

Ne-a rămas de demonstrat doar reprezentarea integrală a operatorului N. Vom obține o afirmație mai generală, anume

(vi) $\qquad f(N) = \int\limits_{\sigma(N,H)} f(z) \, \mathrm{d}E(z), \qquad f \in C(\sigma(N, H)).$

Într-adevăr, dacă

$$f = \sum_{j \in J} \alpha_j \chi_{S_j}$$

este o funcție etajată, atunci din (iv) deducem

$$\left\langle \left(\int\limits_{\sigma(N,H)} f(z) \, \mathrm{d}E(z) \right) x, y \right\rangle = \left\langle \sum_{j \in J} \alpha_j E(S_j)\, x, y \right\rangle =$$

$$= \sum_{j \in J} \alpha_j \mu_{x,y}(S_j) = \int\limits_{\sigma(N,H)} f(z) \, \mathrm{d}\mu_{x,y}(z).$$

Utilizînd acest calcul şi aproximînd funcţiile continue cu funcţii simple, deducem egalitatea (vi). În particular, pentru $f(z) = z$ obţinem reprezentarea integrală a lui N din enunţ, ceea ce încheie demonstraţia.

2.3.7. COROLAR *Fie $N \in \mathcal{L}(H)$ un operator normal. Există atunci un omomorfism de* C*-*algebre*

$$B(\sigma(N, H)) \ni f \to f(N) \in \mathcal{L}(H),$$

care extinde omomorfismul (2.3.1).

Demonstraţie. Este clar că membrul drept al relaţiei (vi) din teorema precedentă are sens chiar pentru funcţii $f \in B(\sigma(N, H))$, deci vom putea defini aplicaţia (2.3.2) printr-o formulă similară. Restul afirmaţiilor rezultă din teorema 2.2.8.

2.4. UNICITATEA MĂSURII SPECTRALE ATAŞATE UNUI OPERATOR NORMAL

Scopul acestui paragraf este de a arăta că măsura spectrală ataşată unui operator normal prin teorema 2.3.6 este unic determinată. Vom începe cu un rezultat general privind *intervertirea* operatorilor normali.

2.4.1. TEOREMĂ. *Fie H_j spaţii Hilbert, fie $N_j \in \mathcal{L}(H_j)$ operatori normali şi fie $\Phi_j : C(\sigma(N_j, H_j)) \to \mathcal{L}(H_j)$ omomorfisme continue de algebre Banach cu unitate astfel încît $\Phi_j(\nu) = N_j$, unde $\nu(z) = z$ şi $j = 1, 2$. Dacă $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ are proprietatea $TN_1 = N_2T$, atunci*

$$T\Phi_1(f \mid \sigma(N_1, H_1)) = \Phi_2(f \mid \sigma(N_2, H_2))T,$$

oricare ar fi $f \in C(\sigma(N_1, H_1) \cup \sigma(N_2, H_2))$.

Vom demonstra în prealabil un rezultat auxiliar.

2.4.2 LEMĂ. *Fie H un spaţiu Hilbert, fie $K \subset \mathbf{C}$ o submulţime compactă şi fie $\Phi : C(K) \to \mathcal{L}(H)$ un omomorfism continuu de algebre Banach cu unitate. Atunci are loc egalitatea $e^{\Phi(h)} = \Phi(e^h)$, oricare ar fi $h \in C(K)$. În plus, fixînd o funcţie $h \in C(K)$, aplicaţia $\mathbf{C} \ni w \to \Phi(e^{wh}) \in \mathcal{L}(H)$ este o funcţie analitică întreagă.*

Demonstraţie. Deoarece

$$e^h = \sum_{k=0}^{\infty} (k!)^{-1} h^k$$

(exemplul 1.4.4) şi Φ este un omomorfism continuu, avem

$$\Phi(e^h) = \sum_{k=0}^{\infty} (k!)^{-1}(\Phi(h))^k = e^{\Phi(h)}.$$

Să observăm apoi că dacă $w \in \mathbf{C}$, atunci

$$e^{wh} = \sum_{k=0}^{\infty} (k!)^{-1} w^k h^k$$

şi

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \|(k!)^{-1} h^k\|^{1/k} \leqslant \lim_{k\to\infty} (k!)^{-1/k} \|h\| = 0;$$

prin urmare, aplicaţia $\mathbf{C} \ni w \to e^{wh} \in C(K)$ este o funcţie analitică întreagă. Atunci şi aplicaţia $w \to \Phi(e^{wh}) = e^{w\Phi(h)}$ este o funcţie analitică întreagă, în baza propoziţiei 1.2.10.

Demonstraţia teoremei 2.4.1. Fie $\bar{N}_j = \Phi_j(\bar{\nu})$, unde $\bar{\nu}(z) = \bar{z}$. Vom demonstra mai întîi egalitatea

$$T\bar{N}_1 = \bar{N}_2 T. \tag{2.4.1}$$

Într-adevăr, din relaţia $TN_1 = N_2 T$, obţinem uşor prin inducţie $TN_1^k = N_2^k T$, oricare ar fi numărul $k \geqslant 0$. Prin urmare, fixînd $w \in \mathbf{C}$, avem egalităţile

$$e^{-\bar{w}N_2} T = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\bar{w}N_2)^k}{k!} T = \sum_{k=0}^{\infty} T \frac{(-\bar{w}N_1)^k}{k!} = Te^{-\bar{w}N_1},$$

deci

$$e^{-\bar{w}N_2} T e^{\bar{w}N_1} = T.$$

Înmulţind această relaţie cu $e^{w\bar{N}_2}$ la stînga şi cu $e^{-w\bar{N}_1}$ la dreapta, obţinem

$$e^{w\bar{N}_2 - \bar{w}N_2} T e^{\bar{w}N_1 - w\bar{N}_1} = e^{w\bar{N}_2} T e^{-w\bar{N}_1}, \tag{2.4.2}$$

deoarece

$$e^{\bar{w}N_1} e^{-w\bar{N}_1} = \Phi_1(e^{\bar{w}\nu})\, \Phi_1(e^{-w\bar{\nu}}) = \Phi_1(e^{\bar{w}\nu - w\bar{\nu}}) = e^{\bar{w}N_1 - w\bar{N}_1}$$

şi

$$e^{w\bar{N}_2} e^{-\bar{w}N_2} = \Phi_2(e^{w\bar{\nu} - \bar{w}\nu}) = e^{w\bar{N}_2 - \bar{w}N_2},$$

în virtutea lemei 2.4.2. În plus,

$$\|e^{\bar{w}N_1 - w\bar{N}_1}\| = \|\Phi_1(e^{\bar{w}\nu - w\bar{\nu}})\| \leqslant \|\Phi_1\|,$$

deoarece $e^{\bar{w}\nu - w\bar{\nu}} = e^{2i\mathrm{Im}(\bar{w}\nu)}$. Analog, $\|e^{w\bar{N}_2 - \bar{w}N_2}\| \leqslant \|\Phi_2\|$. Aceste estimări ne arată că funcţia

$$\mathbf{C} \ni w \to e^{w\bar{N}_2} T e^{-w\bar{N}_1} \in \mathcal{L}(H_1, H_2) \tag{2.4.3}$$

este mărginită. datorită egalităţii (2.4.2). Mai mult decît atît, funcţia (2.4.3) este analitică întreagă, în virtutea lemei 2.4.2 şi a propoziţiei 1.2.6. Teorema 1.2.9 ne asigură că (2.4.3) este o funcţie constantă. Întrucît

$$e^{w\bar{N}_2} T e^{-w\bar{N}_1} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(w\bar{N}_2)^k}{k!}\right) T \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-w\bar{N}_1)^k}{k!}\right) =$$

$$= T + w(\bar{N}_2 T - T\bar{N}_1) + \ldots,$$

deducem $\bar{N}_2 T - T\bar{N}_1 = 0$, adică relaţia (2.4.1).

Dacă $P(z, \bar{z})$ este un polinom complex arbitrar, expresiile $P(N_1, \bar{N}_1)$ şi $P(N_2, \bar{N}_2)$ sînt definite fără echivoc (deoarece N_1 comută cu $\bar{N}_1$, şi N_2 comută cu $\bar{N}_2$, în mod evident). Mai mult decît atît, $P(N_j, \bar{N}_j) = \Phi_j(P)$.

Folosind ipoteza asupra lui T precum și relația (2.4.1), vom putea scrie

$$T\Phi_1(P) = TP(N_1, \bar{N}_1) = P(N_2, \bar{N}_2)T = \Phi_2(P)T. \qquad (2.4.4)$$

Fie $f \in C(K)$, unde $K = \sigma(N_1, H_1) \cup \sigma(N_2, H_2)$. În baza corolarului 0.5.10 există un șir de polinoame $\{P_k(z, \bar{z})\}_{k=1}^{\infty}$ care aproximează funcția f în $C(K)$. În particular,

$$f|\sigma(N_j, H_j) = \lim_{k\to\infty} P_k|\sigma(N_j, H_j).$$

Utilizînd continuitatea aplicațiilor Φ_j și relația (2.4.4), deducem

$$T\Phi_1(f|\sigma(N_1, H_1)) = T\lim_{k\to\infty} \Phi_1(P_k|\sigma(N_1, H_1)) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \Phi_2(P_k|\sigma(N_2, H_2))T = \Phi_2(f|\sigma(N_2, H_2))T,$$

ceea ce încheie demonstrația teoremei.

2.4.3. COROLAR. *Fie H_j spații Hilbert și fie $N_j \in \mathscr{L}(H_j)$ operatori normali $(j = 1, 2)$. Dacă $T \in \mathscr{L}(H_1, H_2)$ are proprietatea $TN_1 = N_2T$, atunci $TN_1^* = N_2^*T$.*

Demonstrație. Fie Φ_j aplicația (2.3.1) corespunzînd operatorului normal N_j. Atunci $\Phi_j(\bar{\nu}) = N_j^*$ și afirmația noastră nu este altceva decî relația (2.4.1).

2.4.4. COROLAR. *Fie H un spațiu Hilbert și fie $N \in \mathscr{L}(H)$ un operator normal. Dacă*

$$\Phi_j : C(\sigma(N, H)) \to \mathscr{L}(H) \quad (j = 1, 2)$$

sînt omomorfisme continue de algebre Banach cu unitate astfel încît $\Phi_j(\nu) = N$, atunci $\Phi_1 = \Phi_2$.

Demonstrație. Rezultatul se obține ca un caz particular al teoremei 2.4.1, pentru $N_1 = N_2 = N$ și $T = 1$.

Acest corolar ne arată că aplicația (2.3.1) este unic determinată.

2.4.5. COROLAR. *Fie $N \in \mathscr{L}(H)$ un operator normal și fie*

$$E_j : \mathrm{Bor}(\sigma(N, H)) \to \mathscr{A}(H) \quad (j = 1, 2)$$

măsuri spectrale cu proprietatea

$$N = \int_{\sigma(N,H)} z\, \mathrm{d}E_1(z) = \int_{\sigma(N,H)} z\, \mathrm{d}E_2(z).$$

Atunci $E_1 = E_2$.

Demonstrație. Aplicațiile

$$\Phi_j(f) = \int_{\sigma(N,H)} f(z)\, \mathrm{d}E_j(z), \qquad f \in C(\sigma(N, H)), \quad j = 1, 2,$$

sînt omomorfisme continue de algebre Banach cu unitate (teorema 2.2.8) cu proprietatea că $\Phi_1(\nu) = \Phi_2(\nu) = N$. În baza corolarului precedent avem $\Phi_1 = \Phi_2$.

Fie apoi $\{\mu^{(j)}_{x,y}\}_{x,y\in H}$ măsurile scalare atașate măsurii spectrale E_j (observația 2.2.11.1°). Din propoziția 2.2.12 deducem

$$\int_{\sigma(N,H)} f(z)\,\mathrm{d}\mu^{(1)}_{x,y}(z) = \int_{\sigma(N,H)} f(z)\,\mathrm{d}\mu^{(2)}_{x,y}(z)$$

pentru orice $f \in C(\sigma(N, H))$. Din teorema 0.4.19 obținem atunci că $\mu^{(1)}_{x,y} = \mu^{(2)}_{x,y}$ pentru orice pereche $x, y \in H$, ceea ce implică egalitatea $E_1 = E_2$ (utilizînd încă o dată propoziția 2.2.12).

Acest rezultat este o completare a teoremei spectrale pentru operatorii normali (teorema 2.3.6) deci vom putea vorbi de *măsura spectrală a unui operator normal.*

2.4.6. EXEMPLU. Fie $r>0$ un număr dat și fie $D_r = \{z \in \mathbf{C} : |z| \leqslant r\}$. Considerăm spațiul Hilbert $H = L^2(D_r)$ format din clasele de funcții măsurabile, egale aproape peste tot, de pătrat integrabil în raport cu măsura Lebesgue pe D_r. Să considerăm operatorul $N \in \mathscr{L}(H)$ dat de relația

$$(Nh)(z) = zh(z), \quad h \in H, \ z \in D_r.$$

Se poate vedea ușor că N este un operator normal, că $\sigma(N, H) = D_r$ și că măsura spectrală a lui N este dată de relația

$$(E(S)h)(z) = \chi_S(z)h(z), \quad S \in \mathrm{Bor}(D_r), \ z \in D_r$$

(exercițiul 2.6.5).

În capitolul următor vom avea nevoie de o variantă întărită a corolarului 2.4.5, rezultat cu care încheiem această paragraf.

2.4.7. PROPOZIȚIE. *Fie $N \in \mathscr{L}(H)$ un operator normal, fie $\Omega \subset \mathbf{C}$ o submulțime închisă cu proprietatea că $\Omega \supset \sigma(N, H)$ și fie E : $\mathrm{Bor}(\Omega) \to \mathscr{A}(H)$ o măsură spectrală astfel încît*

$$N = \int_\Omega z\ \mathrm{d}E(z).$$

Atunci $E(\Omega \setminus \sigma(N, H)) = 0$ și $E|\mathrm{Bor}(\sigma(N, H))$ coincide cu măsura spectrală a operatorului N.

Demonstrație. Vom arăta mai întîi că $E(\Omega \setminus \sigma(N, H)) = 0$. Pentru aceasta fie $S \subset \Omega$ o submulțime închisă cu proprietatea $S \cap \sigma(N, H) = \emptyset$. Reamintim că aplicația

$$\Phi(f) = \int_\Omega f(z)\,\mathrm{d}E(z), \quad f \in B(\Omega),$$

este un omomorfism continuu de algebre Banach cu unitate, în virtutea teoremei 2.2.8. Vom demonstra că $E(S) = \Phi(\chi_S) = 0$. În acest scop vom aplica un argument de tipul celui utilizat în demonstrația lemei 2.3.3. Anume, vom considera funcția $h_w(z) = (w - z)^{-1}\chi_S(z)$, unde $w \notin S$, extinsă cu zero pentru $z \in \Omega \setminus S$. Atunci aplicația $\mathbf{C} \setminus S \ni w \to h_w \in B(\Omega)$

este analitică [exercițiul 1.7.9 (iii)], deci și aplicația $\mathbf{C} \setminus S \ni w \to \Phi(h_w) \in \mathscr{L}(H)$ este analitică. Vom defini apoi funcția

$$F(w) = \begin{cases} \Phi(h_w), & w \notin S, \\ (w - N)^{-1}\Phi(\chi_S) & w \notin \sigma(N, H), \end{cases}$$

care este corect definită [căci $(w - \nu)h_w = \chi_S$, deci $(w - N)\,\Phi(h_w) = \Phi(\chi_S)$], analitică în tot planul complex și nulă la infinit. Așadar, $F = 0$, deci $\Phi(\chi_S) = 0$.

Din motive geometrice evidente vom putea scrie

$$\Omega \setminus \sigma(N, H) = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k,$$

unde $\{S_k\}_k$ este un șir crescător de mulțimi închise. Deoarece $E(S_k) = 0$ pe baza celor demonstrate, lema 2.2.4 ne permite să afirmăm că $E(\Omega \setminus \sigma(N,H)) = 0$. De aici rezultă

$$N = \int_{\Omega} z \, dE(z) = \int_{\sigma(N,H)} z \, dE(z);$$

prin urmare, $E \mid \mathrm{Bor}(\sigma(N,H))$ este chiar măsura spectrală a lui N (corolarul 2.4.5), ceea ce încheie demonstrația.

2.5. CALCUL FUNCȚIONAL CU FUNCȚII CONTINUE

Așadar, fiecărui operator normal N pe un spațiul Hilbert H îi putem ataşa un omomorfism continuu de la algebra Banach a funcțiilor continue pe $\sigma(N, H)$ cu valori în $\mathscr{L}(H)$, omomorfism care extinde calculul funcțional analitic al lui N (teorema 2.3.5) și este unic determinat (corolarul 2.4.4). Vom deduce unele consecințe ale *existenței* unor asemenea omomorfisme de la spații de funcții continue cu valori operatori liniari. Deși vom ieși din cadrul spațiilor Hilbert și al operatorilor normali, o parte din tehnica utilizată în paragrafele precedente rămîne aplicabilă (ceea ce justifică includerea prezentului paragraf în acest capitol).

Fie X un spațiu Banach și fie $C(\mathbf{C})$ algebra funcțiilor continue pe $\mathbf{C}$, cu valori complexe. Pentru început ne vor interesa aplicațiile liniare ale algebrei $C(\mathbf{C})$ în $\mathscr{L}(X)$, avînd anumite proprietăți de continuitate.

2.5.1. DEFINIȚIE. Fie $\Phi : C(\mathbf{C}) \to \mathscr{L}(X)$ o aplicație liniară și fie $K \subset \mathbf{C}$ o submulțime compactă. Vom spune că mulțimea K *suportă* aplicația Φ (sau că Φ este *suportată* de mulțimea K) dacă pentru orice vecinătate compactă V a lui K există o constantă $M_V \geqslant 0$ astfel încît

$$\|\Phi(f)\| \leqslant M_V \|f\|_V, \qquad f \notin C(\mathbf{C}), \tag{2.5.1}$$

unde notăm $\|f\|_L = \sup_{z \in L} |f(z)|$ pentru orice parte compactă $L \subset \mathbf{C}$.

Este clar că (2.5.1) exprimă o anume continuitate a aplicației Φ (asemănătoare cu cea dată de lema 1.3.9).

2.5.2. PROPOZIȚIE. *Fie* $\Phi : C(\mathbf{C}) \to \mathscr{L}(X)$ *o aplicație liniară supportată de o parte compactă a lui* $\mathbf{C}$. *Există atunci o cea mai mică mulțime compactă din* $\mathbf{C}$ *care suportă pe* Φ.

Demonstrație. Fie $\{K_\alpha\}_{\alpha \in A}$ familia tuturor părților compacte din $\mathbf{C}$ care suportă pe Φ. Vom demonstra că și mulțimea $K = \cap\{K_\alpha : \alpha \in A\}$ suportă pe Φ. Fie V_0 o vecinătate deschisă, relativ compactă a mulțimii K în $\mathbf{C}$. Va fi mai comod să lucrăm cu planul complex compactificat $\mathbf{C}_\infty$ (observația 0.1.8). Deoarece $\mathbf{C}_\infty \setminus V_0$ este o parte compactă în $\mathbf{C}_\infty$ și familia $\{\mathbf{C}_\infty \setminus K_\alpha\}_{\alpha \in A}$ formează o acoperire deschisă a sa, există un număr finit de indici $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ astfel încît mulțimile deschise $V_j = \mathbf{C}_\infty \setminus K_{\alpha_j}$ să formeze încă o acoperire a mulțimii $\mathbf{C}_\infty \setminus V_0$. Să remarcăm că familia $\{V_j\}_{j=0}^m$ este o acoperire deschisă a spațiului (metric) compact $\mathbf{C}_\infty$. Vom putea deci alege o partiție a unității subordonată acestei acoperiri; vom lua așadar o familie $\{h_j\}_{j=0}^m \subset C(\mathbf{C}_\infty)$ astfel încît $0 \leqslant h_j \leqslant 1$, $\operatorname{supp} h_j \subset V_j$ $(j = 0, 1, \ldots, m)$ și $h_0 + h_1 + \ldots + h_m = 1$ (exercițiul 2.6.9). Vom alege apoi o vecinătate W_j a mulțimii K_{α_j}, W_j compactă în $\mathbf{C}$, astfel încît $\operatorname{supp} h_j \cap W_j = \emptyset$ pentru fiecare $j \geqslant 1$. Vom nota cu M_j constanta M_{W_j} dată de (2.5.1) pentru vecinătatea W_j. Vom observa acum că orice funcție $f \in C(\mathbf{C})$ se poate scrie ca $f = f_0 + f_1 + \ldots + f_m$, unde $f_j = f(h_j|\mathbf{C})$. Este clar că $\operatorname{supp} f_j \subset (\operatorname{supp} h_j) \cap \mathbf{C}$, prin urmare

$$\|\Phi(f_j)\| \leqslant M_j \|f_j\|_{W_j} = 0, \qquad j = 1, \ldots, m, \tag{2.5.2}$$

deoarece $\operatorname{supp} f_j \cap W_j = \emptyset$.

Fie $M_0 = \max\{M_j : 1 \leqslant j \leqslant m\}$. Deoarece (2.5.1) are loc pe fiecare W_j, avem

$$\|\Phi(f)\| \leqslant M_0 \max_{1 \leqslant j \leqslant m} \|f\|_{W_j}. \tag{2.5.3}$$

Să remarcăm însă că $\Phi(f) = \Phi(f_0)$ pe baza relației (2.5.2) și că

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant m} \|f_0\|_{W_j} = \max_{1 \leqslant j \leqslant m} \|h_0 f\|_{W_j \cup \bar{V}_0} \leqslant \|f\|_{\bar{V}_0},$$

ceea ce, în combinație cu (2.5.3), ne arată că (2.5.1) are loc pe $\bar{V}_0$ cu constanta M_0. Este limpede atunci că mulțimea K suportă pe Φ.

2.5.3. DEFINIȚIE. Fie $\Phi : C(\mathbf{C}) \to \mathscr{L}(X)$ o aplicație liniară suportată de o parte compactă a lui $\mathbf{C}$. Cea mai mică mulțime compactă care suportă pe Φ (dată de propoziția 2.5.2) va fi numită *suportul* aplicației Φ și va fi notată $\operatorname{supp} \Phi$. Despre aplicația Φ vom spune că are *suport compact*.

2.5.4. OBSERVAȚIE. Studiul aplicațiilor cu suport compact, definite mai sus, necesită un rezultat mai adînc din teoria funcțiilor continue. Anume, fiind date o submulțime închisă $F \subset \mathbf{C}$ și o funcție continuă $f : F \to \mathbf{C}$, există atunci o funcție continuă $g : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ astfel încît $g|F = f$ și $g(\mathbf{C}) \subset \operatorname{co}(f(F))$, unde prin $\operatorname{co}(A)$ înțelegem cea mai mică mulțime convexă ce conține mulțimea A. În particular, dacă $|f(z)| \leqslant 1$ oricare ar fi $z \in F$, atunci $|g(w)| \leqslant 1$ oricare ar fi $w \in \mathbf{C}$. Această afirmație este un caz particular al teoremei lui Tietze în varianta lui Dugundji (a se vedea, de exemplu, [15], III, N).

2.5.5. TEOREMĂ. *Fie* $\Phi : C(\mathbf{C}) \to \mathscr{L}(X)$ *o aplicație liniară cu suport compact și fie* $K = \operatorname{supp} \Phi$. *Există atunci o constantă* $M \geqslant 0$ *astfel încît*

$$\|\Phi(f)\| \leqslant M\|f\|_K, \qquad f \in C(\mathbf{C}). \tag{2.5.4}$$

Demonstrație. Vom fixa o vecinătate compactă V a lui K și vom defini numărul

$$\|\Phi\|_V = \sup_{\|f\|_V \leqslant 1} \|\Phi(f)\|.$$

Vom arăta că mărimea $\|\Phi\|_V$ nu depinde de V. Pentru aceasta fie, mai întîi, o vecinătate compactă $W \subset V$ a lui K. Din faptul că $\|f\|_V \leqslant 1$ impică $\|f\|_W \leqslant 1$ rezultă $\|\Phi\|_W \geqslant \|\Phi\|_V$.

Reciproc, fie $\varepsilon > 0$ un număr arbitrar și fie $f \in C(\mathbf{C})$ astfel încît $\|\Phi(f)\| \geqslant \|\Phi\|_W - \varepsilon$. În baza observației 2.5.4, există o funcție $g \in C(\mathbf{C})$ astfel încît $g|W = f|W$ și $\|g\|_V \leqslant 1$. Atunci

$$\|\Phi\|_V \geqslant \|\Phi(g)\| = \|\Phi(f)\| \geqslant \|\Phi\|_W - \varepsilon,$$

deoarece $f = g$ pe mulțimea W, care este vecinătate a mulțimii $\operatorname{supp} \Phi$, deci $\Phi(f) = \Phi(g)$. Numărul $\varepsilon > 0$ fiind arbitrar, obținem și că $\|\Phi\|_V \geqslant \|\Phi\|_W$, deci egalitate.

Dacă W este o vecinătate compată a lui K nu neapărat conținută în V, atunci, pe baza argumentului de mai sus, $\|\Phi\|_V = \|\Phi\|_{V \cap W} = \|\Phi\|_W$, ceea ce demonstrează independența dorită. Vom nota cu $\|\Phi\|$ numărul $\|\Phi\|_V$.

Vom demonstra acum relația (2.5.4), cu $M = \|\Phi\|$. Fie $f \in C(\mathbf{C})$ și fie $\{V_k\}_{k=1}^{\infty}$ un șir descrescător de vecinătăți compacte ale mulțimii K astfel încît $\bigcap \{V_k : k \geqslant 1\} = K$. Funcția f fiind continuă, pentru fiecare indice k vom putea alege un punct $z_k \in V_k$ astfel încît $|f(z_k)| = \|f\|_{V_k}$, pe baza binecunoscutei proprietăți a funcțiilor continue reale de a-și atinge maximumul pe mulțimile compacte (a se vedea, de exemplu, [4], cap. II, § 5). Șirul $\{z_k\}_{k=1}^{\infty} \subset V_1$ fiind mărginit, înlocuindu-l eventual cu un subșir al său îl vom putea presupune convergent către un punct $z_0 \in K$. Deoarece

$$\lim_{k \to \infty} |f(z_k)| = \lim_{k \to \infty} \|f\|_{V_k} \geqslant \|f\|_K,$$

va trebui să avem $|f(z_0)| = \|f\|_K$. Așadar

$$\|\Phi(f)\| \leqslant \lim_{k \to \infty} \|\Phi\| \, \|f\|_{V_k} = \|\Phi\| \, \|f\|,$$

ceea ce încheie demonstrația.

2.5.6. OBSERVAȚIE. Fie $\Phi : C(\mathbf{C}) \to \mathscr{L}(X)$ o aplicație liniară cu suport compact. Există atunci o aplicație liniară și continuă $\Psi : C(\operatorname{supp} \Phi) \to \mathscr{L}(X)$ astfel încît $\Psi(f) = \Phi(g)$, unde g este o extensie arbitrară a funcției $f \in C(\operatorname{supp} \Phi)$ la $\mathbf{C}$. Într-adevăr, dacă g_1 și g_2 sînt extensii ale funcției f la $\mathbf{C}$, atunci $\Phi(g_1 - g_2) = 0$ pe baza estimării (2.5.4). Tot din estimarea (2.5.4) rezultă $\|\Psi\| = \|\Phi\|$, unde $\|\Phi\|$ are semnificația din teorema 2.5.5. Vom nota în continuare tot cu Φ aplicația Ψ, specificînd, atunci cînd este cazul, că este vorba de aplicația $\Phi : C(\operatorname{supp}(\Phi) \to \mathscr{L}(X)$.

2.5.7. DEFINIȚIE. Operatorul $T \in \mathscr{L}(X)$ va fi numit *C-scalar* dacă există un omomorfism de algebre cu unitate $\Phi : C(\mathbf{C}) \to \mathscr{L}(X)$ cu suport compact (în sensul definiției 2.5.3) astfel încît $\Phi(\nu) = T$, unde $\nu(z) = z$.

2.5.8. EXEMPLE. 1° Un operator normal, mai general un operator de forma $T = A^{-1}NA$, unde $N \in \mathscr{L}(H)$ este un operator normal și $A \in \mathscr{L}(H)$ este un operator inversabil, este C-scalar. Într-adevăr, dacă notăm cu ψ omomorfismul (2.3.1) corespunzînd operatorului normal N, atunci $\Phi(f) = A^{-1}\,\psi(f|\sigma(N, H))\,A (f \in C(\mathbf{C}))$ definește un omomorfism suportat de mulțimea $\sigma(N, H)$, astfel încît $\Phi(\nu) = T$.

2° Fie K o submulțime compactă din $\mathbf{C}$ și fie spațiul Banach $X = C(K)$. Vom fixa o funcție $\varphi \in C(K)$. Atunci operatorul

$$(T_\varphi h)(z) = \varphi(z)\, h(z),\ h \in X,\ z \in K$$

este C-scalar. Într-adevăr, aplicația $f \to \Phi(f)$ dată de

$$((\Phi(f)(h)(z) = f(\varphi(z))\, h(z),\ f \in C(\mathbf{C}),\ h \in X,\ z \in K,$$

este un omomorfism de algebre cu unitate cu suport compact, cu proprietatea că $\Phi(\nu) = T_\varphi$ (exercițiul 2.6.10).

2.5.9. OBSERVAȚIE. Omomorfismul Φ din definiția 2.5.7 este unic determinat. Demonstrația acestei afirmații se face la fel cu demonstrația corolarului 2.4.4. Detaliile sînt lăsate pe seama cititorului (exercițiul 2.6.11). Omomorfismul Φ va fi desemnat sub numele de *calcul funcțional cu funcții continue* al operatorului T. Aplicația Φ va putea fi privită și ca funcție definită pe $C(\operatorname{supp}\Phi)$, în sensul precizat în observația 2.5.6. Mai mult decît atît, vom utiliza uneori notația $\Phi(f)$ pentru $\Phi(f|\operatorname{supp}\Phi)$, unde f este definită și continuă într-o vecinătate a mulțimii $\operatorname{supp}\Phi$.

2.5.10. PROPOZIȚIE. *Fie* $\Phi : C(\mathbf{C}) \to \mathscr{L}(X)$ *un omomorfism de algebre cu unitate avînd suportul compact. Atunci au loc următoarele afirmații* :

(1) *mulțimea* $\operatorname{supp}\Phi$ *este cea mai mică mulțime compactă* $K \subset \mathbf{C}$ *cu proprietatea că* $\Phi(f) = 0$ *pentru orice* $f \in C(\mathbf{C})$ *cu* $\operatorname{supp} f \subset \mathbf{C} \setminus K$;

(2) *aplicația* $\Phi : C(\operatorname{supp}\Phi) \to \mathscr{L}(X)$ *este injectivă.*

Demonstrație. (1) În demonstrarea acestei afirmații nu vom utiliza multiplicativitatea aplicației Φ.

Din estimarea (2.5.4) rezultă că mulțimea $K_0 = \operatorname{supp}\Phi$ are proprietatea că $\Phi(f) = 0$ dacă $\operatorname{supp} f \subset \mathbf{C} \setminus K_0$. Fie apoi $K \subset \mathbf{C}$ astfel încît $\Phi(f) = 0$ pentru $f \in C(\mathbf{C})$ cu $\operatorname{supp} f \subset \mathbf{C} \setminus K$ și fie V o vecinătate compactă a mulțimii K. Vom considera mulțimile deschise $G_1 = \overset{\circ}{V}$ și $G_2 = \mathbf{C} \setminus K$, precum și funcțiile pozitive $h_j \in C(\mathbf{C})$ astfel încît $\operatorname{supp} h_j \subset G_j (j = 1, 2)$ și $h_1 + h_2 = 1$ (exercițiul 2.6.9). Pentru fiecare $f \in C(\mathbf{C})$ estimarea (2.5.4) ne conduce la relațiile

$$\|\Phi(f)\| = \|\Phi(h_1 f)\| \leqslant \|\Phi\|\, \|h_1 f\|_{K_0 \cap V} \leqslant \|\Phi\|\, \|f\|_{K_0 \cap V},$$

deoarece $\operatorname{supp}(h_2 f) \cap K = \emptyset$ și $\operatorname{supp}(h_1 f) \subset V$. Din minimalitatea mulțimii K_0 (propoziția 2.5.2) rezultă incluziunea $K_0 \cap V \supset K_0$, deci $V \supset K_0$. Deoarece V este o vecinătate compactă arbitrară a mulțimii K, va trebui să avem $K \supset K_0$.

(2) Pentru obținerea acestei afirmații vom avea nevoie de multiplicativitatea aplicației Φ.

Fie $f \in C(\operatorname{supp}\Phi)$ astfel încît $\Phi(f) = 0$. Fie apoi $g \in C(\mathbf{C})$ o extensie a lui f, $g = 1$ în afara unui disc ce conține $\operatorname{supp}\Phi$. Vom considera mulțimea deschisă $G = \{z \in \mathbf{C} : g(z) \neq 0\}$ și vom arăta că $\Phi(h) = 0$ pentru orice $h \in C(\mathbf{C})$ cu $\operatorname{supp} h \subset G$. Într-adevăr, pentru o astfel de funcție h, aplicația $q(z)$ egală cu $h(z)/g(z)$ dacă $z \in G$ și egală cu zero dacă $z \notin G$ este continuă. Atunci

$$\Phi(h) = \Phi(gq) = \Phi(g)\Phi(q) = \Phi(f)\,\Phi(q) = 0.$$

De aici deducem că $\operatorname{supp}\Phi \cap G = \emptyset$, în baza primei părți a demonstrației; prin urmare, $g \mid \operatorname{supp}\Phi = f = 0$.

2.5.11. TEOREMĂ. *Fie $T \in \mathcal{L}(X)$ un operator C-scalar și fie Φ calculul funcțional cu funcții continue al lui T. Atunci au loc următoarele afirmații*:

(1) $\operatorname{supp}\Phi = \sigma(T, X)$;

(2) *aplicația $\Phi : C(\operatorname{supp}\Phi) \to \mathcal{L}(X)$ extinde calculul funcțional analitic al lui T.*

Demonstrație. (1) Fie $w \notin \operatorname{supp}\Phi$. Atunci $f_w = (w - \nu)^{-1}$ este o funcție continuă pe $\operatorname{supp}\Phi$; deoarece $(w - \nu)f_w = 1$, deducem că $\Phi(f_w) = (w - T)^{-1}$. Așadar $w \notin \sigma(T, X)$, ceea ce demonstrează incluziunea $\sigma(T, X) \subset \operatorname{supp}\Phi$.

Reciproc, să presupunem că $\operatorname{supp}\Phi \setminus \sigma(T, X) \neq \emptyset$. Atunci există o funcție $h \in C(\operatorname{supp}\Phi)$ astfel încît $h \neq 0$ și $\operatorname{supp} h \cap \sigma(T, X) = \emptyset$. Definim atunci aplicația

$$F(w) = \begin{cases} \Phi((w - \nu)^{-1}h), & w \notin \operatorname{supp} h, \\ (w - T)^{-1}\,\Phi(h), & w \notin \sigma(T, X). \end{cases}$$

Se constată cu ușurință că F este corect definită, analitică în tot planul complex și nulă la infinit (a se vedea și demonstrația lemei 2.3.3). Așadar $F \equiv 0$, de unde rezultă $\Phi(h) = 0$. În baza propoziției 2.5.10(2) obținem de aici $h = 0$, ceea ce nu se poate. Contradicția obținută încheie demonstrația primei afirmații.

(2) Fie f o funcție analitică într-o vecinătate a mulțimii $\sigma(T, X) = \operatorname{supp}\Phi$. Vom alege o vecinătate compactă V a mulțimii $\sigma(T, X)$ aflată în domeniul de definiție al funcției f. Există un șir de funcții raționale $\{R_k\}_k$ cu polii aflați în afara mulțimii V, astfel încît $R_k \to f (k \to \infty)$ în $C(V)$ (exercițiul 1.7.13). Din teorema 1.3.12 rezultă atunci că $R_k(T) \to f(T)$. Să remarcăm acum că $R_k(T) = \Phi(R_k)$, observație simplă a cărei demonstrație o lăsăm pe seama cititorului. Din continuitatea aplicației Φ deducem $\Phi(R_k) = R_k(T) \to \Phi(f) = f(T)$, deci afirmația (2) este dovedită.

2.5.12. DEFINIȚIE. Fie T un operator C-scalar și fie Φ calculul funcțional cu funcții continue asociat lui T. Pentru fiecare submulțime închisă $F \subset \sigma(T, X)$ vom defini spațiul liniar

$$X_T(F) = \cap\,\{N(\Phi(f)) : f \in C(\operatorname{supp}\Phi),\ \operatorname{supp} f \cap F = \emptyset\}$$

[unde $N(\Phi(f))$ este nucleul operatorului $\Phi(f)$].

În cele ce urmează ne propunem să arătăm că aplicația $F \to X_T(F)$ joacă, într-un anume sens, rolul pe care-l are măsura spectrală pentru operatorii normali. Vom enunța un șir de rezultate ajutătoare în care păstrăm condițiile și notația din definiția 2.5.12.

2.5.13. LEMĂ. *Spațiul liniar $X_T(F)$ este închis și invariant la acțiunea operatorului $\Phi(h)$ pentru orice $h \in C(\operatorname{supp}\Phi)$. În plus, $\sigma(T, X_T(F)) \subset F$.*

Demonstrație. Este evident faptul că $X_T(F)$ este un subspațiu închis. Dacă $\operatorname{supp} f \cap F = \emptyset$ și $x \in X_T(F)$, atunci $\Phi(f)\Phi(h)x = \Phi(h)\Phi(f)x = 0$, adică $\Phi(h)x \in X_T(F)$, ceea ce arată că $X_T(F)$ este invariant la acțiunea operatorului $\Phi(h)$.

Să presupunem că funcția continuă h este egală cu 1 într-o vecinătate a mulțimii F. Atunci $\Phi(h)|X_T(F)$ este identitatea pe $X_T(F)$, pe care o notăm cu 1_F. Într-adevăr, $\operatorname{supp}(1 - h)$ este o mulțime disjunctă de F, deci dacă $x \in X_T(F)$, atunci $\Phi(1 - h)x = x - \Phi(h)x = 0$.

Fie $w \notin F$. Vom lua o funcție continuă h egală cu 1 într-o vecinătate a mulțimii F, dar cu $w \notin \operatorname{supp} h$. Atunci funcția $h_w = (w - \nu)^{-1}h$ (extinsă cu zero în afara suportului lui h) este continuă și avem $(w - T)\Phi(h_w) = \Phi(h)$; prin urmare, pe baza observației anterioare,

$$(w - T|X_T(F))\,(\Phi(h_w)|X_T(F)) = 1_F,$$

de unde rezultă

$$\Phi(h_w)|X_T(F) = (w - T|X_T(F))^{-1}.$$

Avem, așadar, incluziunea $\sigma(T, X_T(F)) \subset F$.

2.5.14. LEMĂ. *Fie $U \subset \mathbf{C}$ o mulțime deschisă și fie $\varphi \in A(U, X)$ astfel încît $(z - T)\varphi(z) = 0$ pentru $z \in U$. Atunci $\varphi \equiv 0$.*

Demonstrație. Evident, putem presupune că $U \subset \sigma(T, X)$. Vom începe prin a observa că

$$\Phi(h)x \in X_T(\operatorname{supp} h), \quad x \in X, \quad h \in C(\operatorname{supp}\Phi), \tag{2.5.5}$$

ceea ce rezultă direct din definiția 2.5.12.

Să presupunem $\varphi(z_0) \neq 0$ pentru un punct $z_0 \in U$. Fie

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (z - z_0)^k x_k$$

dezvoltarea în serie a funcției analitice φ în vecinătatea punctului z_0. Din ecuația $(z - T)\varphi(z) = 0$ deducem că $(z_0 - T)x_0 = 0$ și $(z_0 - T)x_{k+1} = -x_k$, $k \geqslant 0$. Vom demonstra că $x_k \in X_T(\{z_0\})$ pentru orice $k \geqslant 0$. Pentru aceasta fie $h \in C(\operatorname{supp}\Phi)$ astfel încît $z_0 \notin H$, unde $H = \operatorname{supp} h$. Din (2.5.5) obținem $\Phi(h)x_0 \in X_T(H)$; prin urmare

$$\Phi(h)\,(z_0 - T)x_0 = (z_0 - T|X_T(H))\,\Phi(h)x_0 = 0,$$

de unde rezultă $\Phi(h)x_0 = 0$, căci $z_0 \notin \sigma(T, X_T(H))$ (lema 2.5.13). Așadar, $x_0 \in X_T(\{z_0\})$. Să admitem că $x_k \in X_T(\{z_0\})$ pentru un anume indice $k \geqslant 0$. Dacă h este ca mai sus, avem

$$\Phi(h)(z_0 - T)x_{k+1} = (z_0 - T|X_T(H))\,\Phi(h)\,x_{k+1} = -\Phi(h)x_k = 0,$$

prin urmare $\Phi(h)x_{k+1} = 0$, ceea ce implică apartenența

$$x_{k+1} \in X_T(\{z_0\}).$$

Coeficienții dezvoltării în serie a funcției $\varphi(z)$ fiind în spațiul $X_T(\{z_0\})$, din convergența seriei rezultă că avem $\varphi(z) \in X_T(\{z_0\})$ în vecinătatea punctului z_0. Pe de altă parte, relația

$$(z - T)\,\varphi(z) = (z - T|X_T(\{z_0\}))\,\varphi(z) = 0, \qquad z \neq z_0,$$

implică $\varphi(z) = 0$, deoarece $\sigma(T, X_T(\{z_0\})) = \{z_0\}$ (lema 2.5.13). Din continuitate rezultă atunci și $\varphi(z_0) = 0$, ceea ce este absurd. Așadar, $\varphi \equiv 0$ în U.

2.5.15. LEMĂ. *Fie $Y \subset X$ un spațiu liniar închis, invariant la acțiunea lui T, astfel încît $\sigma(T, Y) \subset F$. Atunci $Y \subset X_T(F)$.*

Demonstrație. Fie $y \in Y$ și fie $h \in C(\operatorname{supp} \Phi)$ astfel încît $\operatorname{supp} h \cap F = \emptyset$. Vrem să arătăm că $\Phi(h)y = 0$. Vom utiliza un procedeu deja familiar cititorului acestei lucrări. Anume, vom defini funcția

$$G(w) = \begin{cases} (w - T|X_T(H))^{-1}\,\Phi(h)y, & w \notin H, \\ \Phi(h)(w - T|Y)^{-1}y, & w \notin F, \end{cases}$$

unde $H = \operatorname{supp} h$. Corectitudinea definiției rezultă din aceea că fiecare ramură din formula funcției G este analitică și

$$(w - T)(w - T|X_T(H))^{-1}\,\Phi(h)y = \Phi(h)y = (w - T)\,\Phi(h)(w - T|Y)^{-1}\,y,$$

dacă $w \notin H \cup F$. În baza lemei 2.5.14 cele două ramuri coincid în domeniul comun de definiție. Analiticitatea funcției G în tot planul complex și anularea ei la infinit vor implica $G \equiv 0$, deci $\Phi(h)y = 0$. Funcția h fiind arbitrară, deducem că $y \in X_T(F)$.

2.5.16. LEMĂ. *Fie $\{F_j\}_{j=1}^m$ o familie de mulțimi închise din $\sigma(T, X)$, disjuncte două cîte două. Atunci avem egalitatea*

$$X_T\left(\bigcup_{j=1}^m F_j\right) = \sum_{j=1}^m X_T(F_j). \tag{2.5.6}$$

Demonstrație. Să remarcăm mai întîi că avem

$$K_1 = \overline{K}_1 \subset K_2 = \overline{K}_2 \subset \sigma(T, X) \Rightarrow X_T(K_1) \subset X_T(K_2), \tag{2.5.7}$$

ceea ce rezultă ușor din definiția 2.5.12. De aici se obține că membrul drept al relației (2.5.6) este conținut în membrul stîng.

Reciproc, deoarece $\sigma(T, X_T(F)) \subset F$, unde $F = \bigcup \{F_j : 1 \leqslant j \leqslant m\}$, atunci $\sigma(T, X_T(F)) = \bigcup \{K_j : 1 \leqslant j \leqslant m\}$, unde $K_j = F_j \cap \sigma(T, X_T(F))$ sînt mulțimi disjuncte două cîte două. În baza teoremei 1.5.2 și a unui raționament inductiv simplu deducem reprezentarea $X_T(F) = X_1 + \ldots + X_m$, unde X_j sînt subspații liniare și închise, invariante la acțiunea lui T, cu proprietatea că $\sigma(T, X_j) = K_j$. Din lema 2.5.15 obținem că $X_j \subset X_T(F_j)$; prin urmare, și membrul stîng al relației (2.5.6) este conținut în membrul drept.

2.5.17. LEMĂ. *Fie* $\{F_j\}_{j=1}^{\infty}$ *o familie de mulțimi închise din* $\sigma(T, X)$. *Atunci avem egalitatea*

$$X_T\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} F_j\right) = \bigcap_{j=1}^{\infty} X_T(F_j). \tag{2.5.8}$$

Demonstrație. În baza incluziunii (2.5.7), membrul stîng al relației (2.5.8) este conținut în membrul drept.

Pentru a demonstra incluziunea inversă, vom considera o funcție $h \in C(\operatorname{supp}\Phi)$ astfel încît $\operatorname{supp} h \cap \bigcap \{F_j : j \geqslant 1\} = \emptyset$. Deoarece familia $\{\operatorname{supp}\Phi \setminus F_j\}_{j=1}^{\infty}$ este o acoperire deschisă a mulțimii compacte $\operatorname{supp} h$ (în topologia relativă a mulțimii $\operatorname{supp}\Phi$), există familia finită de indici $j_1, \ldots, j_m$ astfel încît mulțimile $G_k = \operatorname{supp}\Phi \setminus F_{j_k}$ să formeze o acoperire a mulțimii $\operatorname{supp} h$ $(k = 1, \ldots, m)$. Definind $G_0 = \operatorname{supp}\Phi \setminus \operatorname{supp} h$, obținem o acoperire a mulțimii $\operatorname{supp}\Phi$. Fie $\{f_k\}_{k=0}^{m}$ o partiție a unității subordonată acoperirii $\{G_k\}_{k=0}^{m}$. Cu alte cuvinte, $f_k \in C(\operatorname{supp}\Phi)$, $\operatorname{supp} f_k \subset G_k$ și $f_0 + f_1 + \ldots + f_m = 1$.

Fie x un element din membrul drept al relației (2.5.8). Avem atunci

$$\Phi(h)x = \sum_{k=0}^{m} \Phi(f_k h)\, x = 0,$$

deoarece $\Phi(f_k h)\, x = \Phi(h)\,\Phi(f_k)x = 0$ $(k = 1, \ldots, m)$ [căci $x \in X_T(F_{j_k})$ și $\operatorname{supp} f_k \cap F_{j_k} = \emptyset$], iar $\Phi(f_0 h)x = 0$ fiindcă $\operatorname{supp} f_0$ și $\operatorname{supp} h$ sînt mulțimi disjuncte. Aceasta încheie demonstrația egalității (2.5.8).

2.5.18. TEOREMĂ. *Fie* $T \in \mathscr{L}(X)$ *un operator C-scalar. Pentru orice parte închisă* $F \subset \sigma(T, X)$ *există un subspațiu închis* $X_T(F)$ *al lui* X *avînd următoarele proprietăți*:

(1) *subspațiul* $X_T(F)$ *este invariant la acțiunea lui* T *și* $\sigma(T, X_T(F)) \subset F$;

(2) $X_T(\emptyset) = \{0\}$, $X_T(\sigma(T, X)) = X$;

(3) $X_T\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} F_j\right) = \bigcap_{j=1}^{\infty} X_T(F_j)$ *pentru orice familie numărabilă* $\{F_j\}_{j=1}^{\infty}$ *de părți închise ale mulțimii* $\sigma(T, X)$;

(4) $X_T(F) = X_T(\bar{G}_1 \cap F) + \ldots + X_T(\bar{G}_m \cap F)$ *pentru orice parte închisă* $F \subset \sigma(T, X)$ *și orice acoperire deschisă* $\{G_j\}_{j=1}^{m}$ *a lui* F.

(5) $X_T\left(\bigcup_{j=1}^{m} F_j\right) = X_T(F_1) + \ldots + X_T(F_m)$ *pentru orice familie finită* $\{F_j\}_{j=1}^{m}$ *de părți închise ale lui* $\sigma(T, X)$, *disjuncte două cîte două.*

Demonstrație. Subspațiul $X_T(F)$ este, desigur, cel dat de definiția 2.5.12.

Afirmația (1) este dată de lema 2.5.13.

Afirmația (2) este o consecință imediată a definiției 2.5.12.

Afirmația (3) formează conținutul lemei 2.5.17.

Vom demonstra acum afirmația (4). Va fi suficient să tratăm cazul $F = \operatorname{supp}\Phi$. Într-adevăr, aplicația Φ_F dată de egalitatea $\Phi_F(f) = \Phi(f)|X_T(F)$ $(f \in C(\mathbf{C}))$ este un calcul funcțional cu funcții continue pentru operatorul $T_F = T|X_T(F)$. Deoarece $\operatorname{supp}\Phi_F = \sigma(T_F, X_T(F)) \subset F$, este clar că putem considera doar cazul cînd $F = \operatorname{supp}\Phi$ (prin lema 2.5.15).

Fie $\{G_j\}_{j=1}^m$ o acoperire deschisă a mulțimii supp Φ. Vom alege o partiție a unității $\{h_j\}_{j=1}^m \subset C(\text{supp}(\Phi))$, subordonată acestei acoperiri. Așadar, supp $h_j \subset G_j \cap$ supp Φ și $h_1 + \ldots + h_m = 1$. Orice vector $x \in X$ se va putea scrie atunci ca $x = \Phi(h_1)x + \ldots + \Phi(h_m)x$. În plus,

$$\Phi(h_j)x \in X_T(\text{supp } h_j) \subset X_T(\bar{G}_j \cap \text{supp } \Phi),$$

în baza relațiilor (2.5.5) și (2.5.7).

Deoarece afirmația (5) rezultă din lema 2.5.16, demonstrația este completă.

2.6. EXERCIȚII ȘI COMPLETĂRI

2.6.1. Fie B o C*-algebră cu unitate și fie $M = \{b_1, \ldots, b_n\}$ o familie finită în B astfel încît $b_j b_k = b_k b_j$ și $b_j b_k^* = b_k^* b_j$, oricare ar fi indicii $j, k = 1, \ldots, n$. Arătați că sub -C*-algebra cu unitate B_M (definiția 2.1.8) se obține luînd închiderea în B a algebrei cu involuție a expresiilor de forma (2.1.3) și că B_M este o algebră comutativă.

2.6.2. Arătați că aplicația

$$\text{Bor}(\mathbf{R}) \ni S \to E(S) \in \mathscr{A}(L^2(\mathbf{R}))$$

din exemplul 2.2.2 este o măsură spectrală.

2.6.3. Obțineți relația (3) din propoziția 2.2.12 prin calcul direct, fără a face apel la teorema 2.2.8.

2.6.4. Fie X un spațiu Banach, fie $T \in \mathscr{L}(X)$ și fie $F(w) = e^{wT}$, unde $w \in \mathbf{C}$. Folosind o idee din lema 2.4.2, arătați că F este o funcție analitică întreagă.

2.6.5. Fie K o submulțime compactă din planul complex, fie $\mu \in M(K)$ o măsură pozitivă și fie $H = L^2(K, \mu)$ (spațiul claselor de funcții măsurabile, egale aproape peste tot, de pătrat integrabil în raport cu măsura μ). Să considerăm operatorul

$$(N_0 h)(z) = zh(z), \quad h \in H, \quad z \in K.$$

1° Arătați că un punct $w \notin \sigma(T, H)$ dacă și numai dacă $f_w h \in H$ oricare ar fi $h \in H$, unde $f_w = (w - \nu)^{-1}$ (punem $f_z(z) = 0$). În particular, $\sigma(N, H) \subset K$.

2° Calculați operatorul N_0^* și arătați că N_0 este operator normal.

3° Arătați că aplicația

$$(E(S)h)(z) = \chi_S(z)\, h(z), \quad S \in \text{Bor}(K), \quad h \in H, \quad z \in K,$$

definește o măsură spectrală pe K astfel încît

$$N_0 = \int_K z \, dE(z).$$

4° Determinați măsura spectrală a operatorului N_0. (În legtură cu exemplul 2.4.6.)

2.6.6. Fie N un operator normal pe spațiul Hilbert H și să presupunem că există un vector $x_0 \in H$ astfel încît subspațiul liniar al expresiilor de forma $P(N, N^*)x_0$ [unde $P(z, \bar{z})$ este un polinom complex arbitrar în două variabile] să fie dens în H. Arătați că există atunci o măsură pozitivă μ pe mulțimea $K = \sigma(N, H)$ și un operator unitar $U : H \to L^2(K, \mu)$ astfel încît $UN = N_0 U$, unde N_0 este operatorul definit în exercițiul anterior. Cu alte cuvinte, operatorii N și N_0 sînt *unitar echivalenți*.

Indicație. Se stabilește corespondența

$$U_0 : P(N, N^*)x_0 \to P(z, \bar{z}),$$

care este o izometrie de la un subspațiu dens al lui H pe un subspațiu dens al lui $L^2(K, \mu)$, unde $\mu(S) = \langle E(S)\, x_0\, x_0\rangle$ $[S \in \mathrm{Bor}(K)]$. Se arată că U_0 se extinde la un operator unitar cu proprietățile dorite.

2.6.7. Fie H un spațiu Hilbert și fie $Q \in \mathscr{L}(H)$ un *operator pozitiv*, deci un operator pentru care $\langle Qx, x\rangle \geqslant 0$, oricare ar fi $x \in H$.

1° Arătați că operatorul Q este autoadjunct.

Indicație. Utilizați relația de polarizare dată de exercițiul 0.6.11.

2° Arătați că $\sigma(Q, H) \subset \{s \in \mathbf{R} : s \geqslant 0\}$.

Indicație. Operatorul Q fiind autoadjunct (deci normal), din rezultatele secțiunii 2.3 se obține că $\sigma(Q, H) \subset \mathbf{R}$. Se arată apoi că

$$\|(t - Q)x\|^2 \geqslant t^2 \|x\|^2,\ x \in H,$$

pentru orice $t < 0$. De aici rezultă că $t - Q$ este injectiv și că $R(t - Q)$ este închis. În sfîrșit, dacă $y \in H$ este un vector ortogonal pe $R(t - Q)$, atunci trebuie să avem $y = 0$. Așadar, $R(t - Q) = H$.

3° Folosind calculul funcțional cu funcții continue pentru operatorul Q, arătați că există un operator pozitiv $A \in \mathscr{L}(H)$ astfel încît $A^2 = Q$.

Operatorul A se numește *rădăcina pătrată* a operatorului pozitiv Q.

4° Să presupunem că operatorul Q satisface o condiție mai tare, anume că există $M > 0$ astfel încît $\langle Qx, x\rangle \geqslant M\|x\|^2$ pentru orice $x \in H$. Arătați atunci că $\sigma(Q, H) \subset \{s \in \mathbf{R} : s \geqslant M\}$. Arătați de asemenea că rădăcina pătrată A a lui Q satisface estimarea $\langle Ax, x\rangle \geqslant M^{1/2}\|x\|^2 (x \in H)$. În particular, ambii operatori Q și A au invers în $\mathscr{L}(H)$.

2.6.8. Fie H un spațiu Hilbert și fie $N = (N_1, \ldots, N_m)$ o familie finită de operatori normali care comută doi cîte doi.

1° Arătați că $N_j N_k^* = N_k^* N_j$ pentru orice $j, k = 1, \ldots, m$.

Vom nota cu B_N sub-C*-algebra cu unitate generată în $\mathscr{L}(H)$ de sistemul $\{N_1, \ldots, N_m\}$. În baza punctului 1° și a exercițiului 2.6.1 algebra B_N este comutativă. Vom defini mulțimea

$$\sigma_N = \{(\gamma(N_1), \ldots \gamma(N_m)) \in \mathbf{C}^m : \gamma \in \Gamma(B_N)\}.$$

2° Arătați că există un izomorfism de C*-algebre $\Phi : C(\sigma_N) \to \mathscr{L}(H)$ astfel încît $\Phi(\nu_j) = N_j$ unde $\nu_j(z) = z_j$ iar $z = (z_1, \ldots, z_m)$ este variabila spațiului $\mathbf{C}^m$.

3° Arătați că există o măsură spectrală $E : \mathrm{Bor}(\sigma_N) \to \mathscr{A}(H)$ astfel încît

$$N_j = \int_{\sigma_N} z_j \, dE(z), \quad j = 1, \ldots, m.$$

Indicație. Se utilizează demonstrația teoremei 2.3.6, care funcționează cu modificări neesențiale [de exemplu, aplicația (2.3.1) se înlocuiește cu izomorfismul Φ].

Acest exercițiu ne furnizează un exemplu de măsură spectrală definită pe o mulțime compactă care ne este neapărat conținută în planul complex. Mulțimea σ_N joacă rolul unui spectru pentru sistemul comutativ N. Detalii legate de teoria spectrală a sistemelor comutative finite de operatori liniari pot fi găsite în lucrarea [16].

2.6.9. Fie $\{M, d\}$ un spațiu metric, fie $C(M)$ spațiul liniar al funcțiilor continue pe M și fie $\{G_j\}_{j=1}^m$ o acoperire deschisă a lui M. Arătați că există o familie de funcții $\{h_j\}_{j=1}^m \subset C(M)$ astfel încît $0 \leqslant h_j \leqslant 1$, $\mathrm{supp}\ h_j \subset G_j$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$ și $h_1 + \ldots + h_m = 1$ (reamintim că prin $\mathrm{supp}\ h$ se înțelege *suportul* funcției $h \in C(M)$, adică închiderea în M a mulțimii $\{x \in M : h(x) \neq 0\}$).

O asemenea familie de funcții $\{h_j\}_{j=1}^m \subset C(M)$ se va numi *partiție a unității* (cu funcții continue) *subordonată acoperirii deschise* $\{G_j\}_{j=1}^m$.

Indicație. Se știe că pentru orice pereche de mulțimi F, L din M, F închisă, L deschisă și $F \subset L$ există o funcție $h \in C(M)$ astfel încît $0 \leqslant h \leqslant 1$, $h = 1$ pe F și $h = 0$ pe $M \setminus L$ (exercițiul 1.7.7(v); în existența acestei funcții ipoteza de compacitate a spațiului nu este esențială).

Vom alege pentru fiecare indice j cîte o mulțime închisă F_j și o mulțime deschisă L_j astfel $F_j \subset L_j \subset \bar{L}_j \subset G_j$ și $M = \bigcup \{F_j : 1 \leqslant j \leqslant m\}$. Vom lua apoi cîte o funcție pozitivă $g_j \in C(M)$ astfel încît $g_j | F_j = 1$ și $g_j | M \setminus L_j = 0$. În particular, supp $g_j \subset G_j$. Atunci $h_j = g_j/(g_1 + \ldots + g_m)$ ne furnizează familia căutată.

2.6.10. Demonstrați afirmația conținută în exemplul 2.5.8.2°.

2.6.11. Fie $K_j \subset \mathbf{C}$ mulțimi compacte, fie X_j spații Banach, fie $\Phi_j : C(K_j) \to \mathcal{L}(X_j)$ omomorfisme continue de algebre Banach cu unitate și fie $T_j = \Phi_j(\nu)(j = 1,2)$. Fie apoi $V \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ cu proprietatea că $VT_1 = T_2V$. Arătați atunci că $V\Phi_1(f|K_1) = \Phi_2(f|K_2)V$, oricare ar fi $f \in C(K_1 \cup K_2)$.

În particular, dacă $X_1 = X_2$, $T_1 = T_2$, $K_1 = K_2$ și $V = 1$, acest rezultat implică $\Phi_1 = \Phi_2$, deci unicitatea unui asemenea omomorfism (în legătură cu observația 2.5.9).

Indicație. Se reface demonstrația teoremei 2.4.1 (inclusiv o variantă a lemei 2.4.2), care funcționează și în acest caz, fără modificări esențiale.

2.6.12. Fie G un *grup abelian* ([8], cap. I § 10) și fie $F_m(G)$ C^*-algebra funcțiilor mărginite pe G, cu valori complexe. Vom fixa o familie finită $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ de funcții din $F_m(G)$ cu valori reale și o familie $\{g_1, \ldots, g_n\}$ de elemente din G. Fie $\mathbf{Z}$ inelul numerelor întregi. Vom defini mulțimea

$$N(p) = \{q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbf{Z}^n : 1 \leqslant q_k \leqslant p\}, \quad p = 1, 2, 3, \ldots$$

1° Arătați că mulțimea $N(p)$ are p^n elemente.

2° Fie $k \in \{1, \ldots, n\}$ un indice fixat. Să considerăm o sumă de forma

$$\sum_{q \in N(p)} (\varphi_k(\theta(q)) - \varphi_k(g_k \cdot \theta(q)),$$

unde $\theta(q) = g_1^{q_1} \ldots g_n^{q_n}$. Arătați că în această sumă există cel mult $2p^{n-1}$ termeni nenuli.

3° Fie acum funcția

$$(*) \quad \varphi(g) = \sum_{k=1}^{n} (\varphi_k(g) - \varphi_k(g_k g)).$$

Utilizînd punctele 1° și 2°, obțineți estimarea

$$p^n \inf_{g \in G} \varphi(g) \leqslant \sum_{q \in N(p)} \varphi(\theta(q)) \leqslant 2Mnp^{n-1}, \quad p = 1, 2, 3, \ldots,$$

unde $M = \max \{\|\varphi_k\| : 1 \leqslant k \leqslant n\}$. Este limpede atunci că

$$(**) \quad \inf_{g \in G} \varphi(g) \leqslant 0.$$

4° Să notăm cu L spațiul liniar închis generat în $F_m(G)$ de sumele de forma (*), cu n arbitrar, în care $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ nu mai sînt neapărat funcții cu valori reale. Utilizînd relația (**), arătați că $\inf \{\|1 - \varphi\| : \varphi \in L\} = 1$.

Folosind 4° și teorema Hahn-Banach, obținem existența unei funcționale $\mu \in F_m(G)^*$ astfel încît $\mu | L = 0$ și $\|\mu\| = \mu(1) = 1$. Faptul că $\mu | L = 0$ implică egalitatea $\mu(\varphi_g) = \mu(\varphi)$ oricare ar fi funcția $\varphi \in F_m(G)$, unde definim $\varphi_g(h) = \varphi(gh)$ $(g, h \in G)$.

5° Fie $\varphi \in F_m(G)$ o funcție cu valori reale. Utilizînd dezvoltarea în serie a funcției $e^{it\varphi}$ $(t \in \mathbf{R})$ deduceți relația

$$\operatorname{Re} \mu(e^{it\varphi}) = 1 - t \operatorname{Im} \mu(\varphi) + t^2 \tau(t) \leqslant 1,$$

unde $\tau(t)$ este o funcție reală de variabila t, mărginită într-o vecinătate a originii. Obțineți de aici că $\operatorname{Im} \mu(\varphi) = 0$, deci că funcționala μ are valori reale pe mulțimea funcțiilor reale.

6° Fie $\varphi \in F_m(G)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$. Din egalitatea $\mu(\varphi) + \mu(1 - \varphi) = 1$ deduceți că $\mu(\varphi) \geqslant 0$. Obțineți apoi că $\mu(\varphi) \geqslant 0$ pentru orice $\varphi \in F_m(G)$, $\varphi \geqslant 0$. Cu alte cuvinte, funcționala μ este pozitivă pe $F_m(G)$.

O aplicație liniară și pozitivă $\mu : F_m(G) \to \mathbf{C}$ astfel încît $\mu(1) = 1$ și $\mu(\varphi_g) = \mu(\varphi)$ pentru orice $\varphi \in F_m(G)$ și $g \in G$ se numește *medie invariantă* pe grupul G (a cărei existență este dovedită pe calea indicată mai sus).

2.6.13. Fie G un grup abelian cu unitatea e și fie H un spațiu Hilbert. Se numește *reprezentare* a lui G în H o aplicație $G \ni g \to T_g \in \mathcal{L}(H)$ cu proprietatea că $T_e = 1$ și $T_{g_1 g_2} = T_{g_1} T_{g_2}$ oricare ar fi $g_1, g_2 \in G$. Reprezentarea $g \to T_g$ se numește *mărginită* dacă există o constantă $M > 0$ astfel încît $\|T_g\| \leqslant M$ oricare ar fi $g \in G$.

Fie $g \to T_g$ o reprezentare mărginită a grupului G în spațiul Hilbert H și fie μ o medie invariantă pe G(exercițiul 2.6.12). Evident, funcția $\varphi_{x,y}(g) = \langle T_g x, T_g y \rangle$ este un element al spațiului $F_m(G)$ oricare ar fi $x, y \in H$. Are deci sens să definim aplicația $\theta : H \times H \to \mathbf{C}$ prin egalitatea $\theta(x, y) = \mu(\varphi_{x,y})$.

1° Arătați că θ satisface condițiile propoziției 2.3.5.

În virtutea propoziției 2.3.5 există atunci un operator autoadjunct Q astfel încît $\theta(x, y) = \langle Qx, y \rangle$ $(x, y \in H)$.

2° Arătați că operatorul Q satisface estimarea

$$\langle Qx, x \rangle \geqslant M^{-2} \|x\|^2, \quad x \in H.$$

În baza exercițiului 2.6.7.4°, vom putea considera rădăcina pătrată A a operatorului Q care este un operator inversabil.

3° Utilizînd proprietatea de invarianță a aplicației μ [deci $\mu((\varphi_{x,y})_g) = \mu(\varphi_{x,y})$, $g \in G$, $x, y \in H$], demonstrați faptul că $U_g = AT_gA^{-1}$ este un operator unitar oricare ar fi $g \in G$.

Concluzie. Pentru orice reprezentare mărginită $G \ni g \to T \in \mathcal{L}(H)$ a grupului abelian G în spațiul Hilbert H există un operator pozitiv, inversabil $A \in \mathcal{L}(H)$ și o reprezentare $G \ni g \to U_g \in \mathcal{L}(H)$ astfel încît $U_g = AT_gA^{-1}$ și fiecare operator U_g este unitar.

2.6.14. Fie H un spațiu Hilbert, fie $T \in \mathcal{L}(H)$ un operator C-scalar și fie $\Phi : C(\mathbf{C}) \to \mathcal{L}(H)$ calculul funcțional cu funcții continue asociat lui T. Fie grupul abelian $G = \mathbf{R}^2$. Pentru fiecare pereche $(s, t) \in \mathbf{R}^2$ vom considera operatorul

$$T_{(s,t)} = \Phi(e^{i(s \operatorname{Re} \nu + t \operatorname{Im} \nu)}).$$

1° Arătați că aplicația $\mathbf{R}^2 \ni (s, t) \to T_{(s,t)} \in \mathcal{L}(H)$ este o reprezentare mărginită a grupului $\mathbf{R}^2$.

În baza exercițiului 2.6.13 există un operator pozitiv și inversabil $A \in \mathcal{L}(H)$ astfel încît operatorul $U_{(s,t)} = AT_{(s,t)}A^{-1}$ să fie unitar pentru orice $(s, t) \in \mathbf{R}^2$.

2° Fie $U(s) = U_{(s,0)} = A\Phi(e^{is \operatorname{Re} \nu})A^{-1}$ $(s \in \mathbf{R}.)$ Utilizînd dezvoltarea în serie a funcției $e^{is \operatorname{Re} \nu}$, demonstrați că

$$\lim_{s \to 0} \frac{U(s) - 1}{is} = A\Phi(\operatorname{Re} \nu)A^{-1},$$

în topologia lui $\mathcal{L}(H)$. Tot de aici deduceți faptul că operatorul $R = A\Phi(\operatorname{Re} \nu)A^{-1}$ este autoadjunct. În mod analog, operatorul $S = A\Phi(\operatorname{Im} \nu)A^{-1}$ este autoadjunct. Deoarece operatorii R și S comută, operatorul $N = R + iS = ATA^{-1}$ este normal.

Concluzie. Fiind dat un operator C-scalar pe un spațiu Hilbert H, există un operator pozitiv și inversabil $A \in \mathcal{L}(H)$ astfel încît operatorul $N = ATA^{-1}$ să fie normal. Așadar exemplul 2.5.8.1° descrie întreaga clasă a operatorilor C-scalari pe un spațiu Hilbert.

Există însă operatori C-scalari pe spații Banach care nu sînt Hilbert (exemplul 2.5.8.2°).

2.6.15. Fie X un spațiu Banach, fie $K \subset \mathbf{C}$ o submulțime compactă și fie $F \to X(F)$ o aplicație definită pe familia părților închise ale lui K, cu valori subspații liniare închise ale lui X. Aplicația $F \to X(F)$ se numește *capacitate spectrală* dacă are proprietățile (2), (3) și (4) din teorema 2.5.18 (în care înlocuim $\sigma(T, X) = K$); proprietatea (4) o cerem doar pentru $F = K$. Fie apoi $T \in \mathcal{L}(X)$ și fie $F \to X(F)$ o capacitate spectrală definită pe $\sigma(T, X)$. Dacă este îndeplinită și condiția (1) din teorema 2.5.18, spunem că T este un operator *decompozabil*. Teorema 2.5.18 exprimă, în esență, că orice operator C-scalar este decompozabil. Arătați că orice operator C-scalar posedă o capacitate spectrală unic determinată. (De fapt, orice operator decompozabil are o capacitate spectrală unic determinată. Pentru detalii se poate consulta lucrarea [16]).

3. DESCOMPUNEREA SPECTRALĂ A OPERATORILOR AUTOADJUNCȚI (NEMĂRGINIȚI)

În acest capitol se studiază reprezentarea integrală a operatorilor autoadjuncți, nu neapărat mărginiți, în spații Hilbert. Sînt de asemenea prezentate unele consecințe ale acestei reprezentări integrale precum și rezultate apropiate de acest context.

3.1. ADJUNCTUL UNUI OPERATOR NEMĂRGINIT

Fie H, K spații Hilbert cu produsele scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_K$, respectiv.

3.1.1. DEFINIȚII. Fie $T : D(T) \subset H \to K$ un operator liniar. Vom spune că T este *dens definit* dacă $\overline{D(T)} = H$.

Fie deci T operator liniar dens definit. Vom defini *adjunctul* $T^* : D(T^*) \subset K \to H$ al operatorului T în modul următor : spațiul $D(T^*)$ va fi format din mulțimea tuturor vectorilor $y \in K$ pentru care există $v \in H$ astfel încît

$$\langle y, Tx \rangle_K = \langle v, x \rangle_H, \quad x \in D(T). \tag{3.1.1}$$

Elementul v din (3.1.1) este unic determinat deoarece, dacă $v_1, v_2 \in H$ satisfac relația (3.1.1), atunci $\langle v_1 - v_2, x \rangle_H = 0$ pentru orice $x \in D(T)$. Spațiul $D(T)$ fiind dens în H, rezultă $v_1 = v_2$. Așadar, putem defini în mod univoc $T^*(y) = v$.

Să observăm că dacă $T \in \mathcal{L}(H, K)$, operatorul T^* definit mai sus coincide cu operatorul dat de definiția 0.3.12.

3.1.2. LEMĂ. *Fie $T : D(T) \subset H \to K$ un operator liniar, dens definit. Atunci adjunctul său T^* este un operator liniar și închis.*

Demonstrație. Fie $y_1, y_2 \in D(T^*)$, fie $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{C}$ și fie $x \in D(T)$. Atunci

$$\langle \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2, Tx \rangle_K = \alpha_1 \langle y_1, Tx \rangle_K + \alpha_2 \langle y_2, Tx \rangle_K =$$

$$= \alpha_1 \langle T^*(y_1), x \rangle_H + \alpha_2 \langle T^*(y_2), x \rangle_H =$$

$$= \langle \alpha_1 T^*(y_1) + \alpha_2 T^*(y_2), x \rangle_H.$$

Vectorul $x \in D(T)$ fiind arbitrar, din (3.1.1) deducem

$$T^*(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 T^*(y_1) + \alpha_2 T^*(y_2),$$

ceea ce atestă liniaritatea lui T^*.

Fie $\{y_k\}_k$ un șir de vectori din $D(T^*)$ astfel încît $y_k \to y$ și $T^* y_k \to v$ cînd $k \to \infty$. Atunci

$$\langle y, Tx\rangle_K = \lim_{k\to\infty} \langle y_k, Tx\rangle_K = \lim_{k\to\infty} \langle T^* y_k, x\rangle_H = \langle v, x\rangle_H,$$

oricare ar fi $x \in D(T)$. Din (3.1.1) rezultă că $y \in D(T^*)$ și că $T^* y = v$. Așadar, $T^* \in \mathscr{C}(K, H)$.

3.1.3. LEMĂ. (1) *Fie $T : D(T) \subset H \to K$ un operator liniar, dens definit. Atunci $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$ oricare ar fi $\alpha \in \mathbf{C}$.*

(2) *Fie $T_j : D(T_j) \subset H \to K (j = 1, 2)$ operatori liniari cu proprietatea că spațiul $D(T_1) \cap D(T_2)$ este dens în H. Atunci $(T_1 + T_2)^* \supset T_1^* + T_2^*$.*

Dacă $T_1 \in \mathscr{L}(H, K)$, atunci $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$.

(3) *Fie $T_1 : D(T_1) \subset H \to K$, $T_2 : D(T_2) \subset K \to L$ (L un alt spațiu Hilbert) doi operatori liniari. Dacă spațiile $D(T_2)$ și $D(T_2 T_1)$ sînt dense, atunci $(T_2 T_1)^* \supset T_1^* T_2^*$.*

Demonstrație. Afirmațiile lemei sînt versiuni ale relațiilor (ii), (iii) și (iv) de la observația 0.3.13.

Afirmația (1) este imediată și o lăsăm pe sema cititorului, ca exercițiu.

Vom demonstra afirmația (2). Evident, spațiile $D(T_1)$ și $D(T_2)$ sînt dense în H. Fie $y \in D(T_1^*) \cap D(T_2^*)$ și fie $x \in D(T_1 + T_2) = D(T_1) \cap D(T_2)$ (a se vedea paragraful 0.3 pentru unele detalii). Atunci

$$\langle y, (T_1 + T_2)x\rangle = \langle T_1^* y, x\rangle + \langle T_2^* y, x\rangle = \langle (T_1^* + T_2^*)y, x\rangle,$$

prin urmare $y \in D((T_1 + T_2)^*)$ și $(T_1 + T_2)^* y = (T_1^* + T_2^*)y$.

Să presupunem acum că $T_1 \in \mathscr{L}(H, K)$. Fie $y \in D((T_1 + T_2)^*)$. Dacă $x \in D(T_1 + T_2) = D(T_2)$, atunci

$$\langle (T_1 + T_2)^* y, x\rangle - \langle T_1^* x, y\rangle = \langle y, T_2 x\rangle;$$

prin urmare, $y \in D(T_2^*)$ și $T_2^* y = (T_1 + T_2)^* y - T_1^* y$. Așadar, în acest caz avem egalitatea $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$.

În sfîrșit, să demonstrăm și proprietatea (3). Este limpede că spațiul $D(T_1)$ este și el dens. Fie $w \in D(T_1^* T_2^*)$ și fie $x \in D(T_1 T_2)$. Atunci

$$\langle T_1^* T_2^* w, x\rangle = \langle w, T_2 T_1 x\rangle,$$

deci $w \in D((T_2 T_1)^*)$ și $(T_2 T_1)^* x = T_1^* T_2^* x$, ceea ce încheie demonstrația lemei.

Vom considera în cele ce urmează un operator $U : H \oplus K \to K \oplus H$ dat de relația

$$U(x \oplus y) = iy \oplus (-ix), \quad x \in H, y \in K, \tag{3.1.2}$$

unde $i^2 = -1$. Este uşor de văzut că operatorul U este unitar. În particular, dacă $G \subset H \oplus K$ este un subspaţiu liniar, atunci $U(G^\perp) = U(G)^\perp$ (deoarece U duce vectorii ortogonali în vectori orotogonali). Asemănător fie $V : K \oplus H \to H \oplus K$ operatorul dat de relaţia

$$V(y \oplus x) = ix \oplus (-iy), \quad x \in H, \ y \in K. \tag{3.1.3}$$

Operatorul V este şi el unitar ; în plus VU este chiar identitatea pe $H \oplus K$.

3.1.4. LEMĂ. *Fie $T : D(T) \subset H \to K$ un operator liniar, dens definit. Atunci are loc egalitatea $G(T^*) = U(G(T))^\perp$, unde U este operatorul unitar dat de relaţia* (3.1.2).

Demonstraţie. Fie $y \oplus T^*y \in G(T^*)$ şi $x \oplus Tx \in G(T)$ elemente arbitrare. Avem

$$\langle y \oplus T^* y, U(x \oplus Tx)\rangle = \langle y \oplus T^*y, iTx \oplus (-ix)\rangle =$$
$$= \langle y, iT\,x\rangle + \langle T^*y, -ix\rangle = i(\langle T^*y, x\rangle - \langle y, Tx\rangle) = 0$$

Aşadar, $y \oplus T^*y \in U(G(T))^\perp$.

Invers, fie $y \oplus v \in U(G(T))^\perp$. Atunci

$$0 = \langle y \oplus v, U(x \oplus Tx)\rangle = i(\langle v, x\rangle - \langle y, Tx\rangle),$$

unde $x \in D(T)$ este arbitrar. Prin urmare $y \in D(T^*)$ şi $T^*y = v$.

3.1.5. PROPOZIŢIE. *Dacă $T \in \mathscr{C}(H, K)$ este dens definit, atunci adjunctul său $T^* \in \mathscr{C}(K, H)$ şi este dens definit.*

Demonstraţie. Faptul că $T^* \in \mathscr{C}(K, H)$ rezultă din lema 3.1.2. Va fi deci suficient să arătăm că T^* este dens definit. Fie $y_0 \in K$ un vector ortogonal pe subspaţiul liniar $D(T^*)$. Atunci $y_0 \oplus 0 \in G(T^*)^\perp = U(G(T))$, ultima egalitate rezultînd din lema precedentă şi din faptul că spaţiul $G(T)$ este închis. De aici se obţine că $0 \oplus y_0 \in G(T)$, deci $y_0 = 0$ deoarece $G(T)$ este un grafic. Demonstraţia este completă.

În baza propoziţiei 3.1.5, dacă $T \in \mathscr{C}(H, K)$, atunci are sens să considerăm operatorul $T^{**} = (T^*)^*$.

3.1.6. LEMĂ. *Fie $T \in \mathscr{C}(H, K)$ un operator dens definit. Atunci $T^{**} = T$.*

Demonstraţie. Ne vom baza pe observaţia simplă că doi operatori liniari sînt egali dacă şi numai dacă graficele lor sînt egale.

Fie V, operatorul dat de (3.1.3). În baza lemei 3.1.4 vom putea scrie egalităţile

$$G(T^{**}) = V(G(T^*))^\perp = V(U(G(T))^\perp)^\perp = VU(G(T))^{\perp\perp} = G(T),$$

în care am folosit faptul că VU este identitatea pe $H \oplus K$.

3.1.7. LEMĂ. *Fie $T \in \mathscr{C}(H, K)$ un operator dens definit. Atunci au loc egalităţile* :

$$(1)\ N(T^*) = R(T)^\perp ; \quad (2)\ \overline{R(T^*)} = N(T)^\perp.$$

Demonstrație. Pentru a demonstra egalitatea (1), fie $y \in N(T^*)$. Atunci $\langle T^*y, x\rangle = 0 = \langle y, Tx\rangle$, oricare ar fi $x \in D(T)$. Așadar, $y \in R(T)^\perp$.

Reciproc, fie $y \in R(T)^\perp$. Atunci $\langle y, Tx\rangle = 0 = \langle 0, x\rangle$ oricare ar fi $x \in D(T)$. Avem deci $y \in D(T^*)$ și $T^*y = 0$, ceea ce înseamnă că $y \in N(T^*)$.

Pentru a obține relația (2), vom utiliza (1) și lema 3.1.6. Avem

$$\overline{R(T^*)} = (R(T^*)^\perp)^\perp = N(T^{**})^\perp = N(T)^\perp.$$

3.1.8. LEMĂ. *Fie* $T \in \mathscr{C}(H, K)$ *un operator dens definit și bijectiv Atunci* $(T^*)^{-1} \in \mathscr{L}(H, K)$ *și* $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

Demonstrație. Deoarece $T^{-1} \in \mathscr{L}(K, H)$, avem $(T^{-1})^* \in \mathscr{L}(H, K)$. Fie vectorii $v \in H$ și $x \in D(T)$. Din egalitățile

$$\langle Tx, (T^{-1})^* v\rangle_K = \langle T^{-1}\, Tx, v\rangle_H = \langle x, v\rangle_H$$

deducem $(T^{-1})^* v \in D(T^*)$ și $T^*(T^{-1})^* v = v$.

Invers, fie $y \in D(T^*)$ și $w \in K$ vectori arbitrari. Atunci

$$\langle (T^{-1})^* T^*y, w\rangle_K = \langle T^*y, T^{-1}w\rangle_H = \langle y, w\rangle_K,$$

deoarece $T^{-1}w \in D(T)$. Așadar, $(T^{-1})^* T^*y = y$, ceea ce dovedește egalitatea $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$, pe baza unicității inversului.

Exemple semnificative de operatori liniari nemărginiți și de adjuncți ai acestora vor apărea în paragrafele care urmează (a se vedea, de pildă, exemplul 3.2.2).

3.2. OPERATORII AUTOADJUNCȚI ȘI REPREZENTAREA LOR INTEGRALĂ

Fie H un spațiu Hilbert cu produsul scalar $\langle .,. \rangle$.

3.2.1. DEFINIȚIE. Fie $A : D(A) \subset H \to H$ un operator liniar, dens definit. Vom spune că A este *autoadjunct* dacă $A = A^*$

Existența lui A^* este asigurată de densitatea spațiului $D(A)$ în H. Egalitatea $A^* = A$ ne arată, în particular, că $D(A^*) = D(A)$ și că A este un operator închis (lema 3.1.2).

3.2.2. EXEMPLU. Fie $H = L^2(\mathbf{R})$ (spațiul claselor de funcții măsurabile pe dreapta reală, egale aproape peste tot și al căror modul la pătrat este o funcție integrabilă în raport cu măsura Lebesgue). Definim operatorul A pe subspațiul liniar

$$D(A) = \{h(t) \in H : th(t) \in H\} \quad (t \in \mathbf{R}),$$

prin relația $Ah(t) = th(t)$ $(h \in D(A))$. Operatorul A este autoadjunct (exercițiul 3.9.3). Într-un anume sens, acesta este un exemplu tipic de operator autoadjunct (nemărgint).

Ca și în cazul operatorilor continui (a se vedea exercițiul 2.6.7), operatorii autoadjuncți nemărginiți au spectru real.

3.2.3. PROPOZIȚIE. *Fie $A \in \mathscr{C}(H)$ un operator autoadjunct. Atunci* $\sigma(A, H) \subset \mathbf{R}$.

Demonstrație. Fie $x \in D(A)$ și $z \in \mathbf{C}$. Utilizînd ipoteza asupra lui A, vom putea scrie că

$$\|(z - A)x\|^2 = \langle (z - A)x, (z - A)x\rangle = |z|^2 \|x\|^2 -$$

$$- z\langle x, Ax\rangle - \bar{z}\langle Ax, x\rangle + \|Ax\|^2 =$$

$$= (\operatorname{Im} z)^2 \|x\|^2 + (\operatorname{Re} z)^2 \|x\|^2 - 2(\operatorname{Re} z)\langle Ax, x\rangle + \|Ax\|^2 \geqslant$$

$$\geqslant (\operatorname{Im} z)^2 \|x\|^2 + ((\operatorname{Re} z)\|x\| - \|Ax\|)^2 \geqslant (\operatorname{Im} z)^2 \|x\|^2.$$

Din acest calcul deducem că

$$\|x\| \leqslant |\operatorname{Im} z|^{-1} \|(z - A)x\|, \quad \operatorname{Im} z \neq 0, \quad x \in D(A). \tag{3.2.1}$$

Relația (3.2.1) arată că operatorul $z - A$ este injectiv pentru orice $z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$. Vom demonstra că $z - A$ este și surjectiv. Pentru aceasta, vom observa în primul rînd că $R(z - A)$ este dens în H. Într-adevăr, avem egalitățile

$$\overline{R(z - A)} = N((z - A)^*)^\perp = N(\bar{z} - A)^\perp = H,$$

pe baza lemelor 3.1.7(1), 3.1.3(2) și a injectivității lui $\bar{z} - A$. Fie apoi un vector $y \in H$ fixat. Utilizînd densitatea lui $R(z - A)$ în H, vom putea alege un șir $\{y_k\}_k$ de forma $y_k = (z - A)x_k$, astfel încît $y_k \to y$, cînd $k \to \infty$. În plus, din relația (3.2.1) deducem

$$\|x_k - x_m\| \leqslant |\operatorname{Im} z|^{-1} \|y_k - y_m\| \to 0 \quad (k, m \to \infty).$$

Așadar, există un vector $x \in H$, astfel încît $x_k \to x (k \to \infty)$. Deoarece $y_k = (z - A)x_k \to y$ și operatorul $z - A$ este închis, deducem că $x \in D(z - A) = D(A)$ și că $(z - A)x = y$, adică surjectivitatea operatorului $z - A$.

În concluzie, pentru orice $z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ operatorul $z - A$ este injectiv și surjectiv, ceea ce este echivalent cu faptul că $z \notin \sigma(A, H)$, în baza teoremei graficului închis.

3.2.4. LEMĂ. *Fie $A \in \mathscr{C}(H)$ un operator autoadjunct. Atunci operatorul $(z - A)^{-1} \in \mathscr{L}(H)$ este normal oricare ar fi $z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$.*

Demonstrație. Fie $z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ și să notăm $N_z = (z - A)^{-1}$ (în virtutea propoziției precedente). Din lema 3.1.8 obținem apoi că

$$N_z^* = ((z - A)^{-1})^* = ((z - A)^*)^{-1} = (\bar{z} - A)^{-1} = N_{\bar{z}}.$$

Avem, așadar, $N_z N_z^* = N_z^* N_z$, ca un caz particular al comutării în ecuația rezolvantă (observația 1.6.3.2°)

3.2.5. PROPOZIȚIE. *Fie $A \in \mathscr{C}(H)$ un operator autoadjunct și fie operatorul normal $N = N_i = (i - A)^{-1}$. Există atunci o măsură spectrală $E : \operatorname{Bor}(\mathbf{R}) \to \mathscr{A}(H)$ astfel încît*

$$N = \int_{\mathbf{R}} (i - t)^{-1} \, dE(t). \tag{3.2.2}$$

Demonstrație. Dacă $A \in \mathscr{L}(H)$ și dacă E_0 este măsura spectrală a lui A, vom defini aplicația

$$E(S) = E_0(S \cap \sigma(A, H)), \quad S \in \mathrm{Bor}(\mathbf{R}).$$

Este limpede că E este o măsură spectrală pe $\mathbf{R}$ și că avem egalitatea (3.2.2), în baza corolarului 2.3.7.

Vom putea presupune, așadar, că $A \in \mathscr{C}(H) \setminus \mathscr{L}(H)$. Fie $\theta : \mathbf{C} \setminus \{i\} \to \mathbf{C}$ funcția dată de $\theta(z) = (\mathrm{i} - z)^{-1}$ $(z \neq \mathrm{i})$. Corolarul 1.6.9 ne asigură atunci că $\theta(A) = N$; prin urmare, avem și că $\sigma(N, H) = \theta(\sigma_\infty(A, H)) \ni 0$, ceea ce rezultă din teorema 1.6.11 și din faptul că $\sigma_\infty(A, H) \ni \infty$ (observația 1.6.7.1° și ipoteza noastră).

Vom nota $\mathbf{R}_\infty = \mathbf{R} \cup \{\infty\} \subset \mathbf{C}_\infty$ și vom considera aplicația $\tilde{\theta} : \mathbf{R}_\infty \to \mathbf{C}$ dată de $\tilde{\theta}(t) = \theta(t)$ dacă $t \in \mathbf{R}$ și $\tilde{\theta}(\infty) = 0$. Evident, aplicația $\tilde{\theta}$ este continuă. Vom nota cu Ω mulțimea compactă $\tilde{\theta}(\mathbf{R}_\infty)$. Din considerațiile de mai înainte rezultă că $\Omega \supset \sigma(N, H)$.

Fie E_N măsura spectrală a operatorului normal N. Vom extinde pe E_N (așa cum am mai procedat la o măsură spectrală $\tilde{E}_N$ pe Ω prin relația

$$\tilde{E}_N(L) = E_N(L \cap \sigma(N, H)), \quad L \in \mathrm{Bor}(\Omega). \tag{3.2.3}$$

Să remarcăm apoi că aplicația $\tilde{\theta}$ este bijectivă pe $\mathbf{R}_\infty$ și că inversa sa $\tilde{\tau} : \Omega \to \mathbf{R}_\infty$ este dată de $\tilde{\tau}(w) = i - w^{-1}$, dacă $w \neq 0$ și $\tilde{\tau}(0) = \infty$. Vom putea deci defini aplicația $\tilde{E}$ pe Bor $(\mathbf{R}_\infty)$ prin relația

$$\tilde{E}(S) = \tilde{E}_N(\tilde{\tau}^{-1})\,(S)), \quad S \in \mathrm{Bor}(\mathbf{R}_\infty). \tag{3.2.4}$$

Din teorema 2.2.10 rezultă că $\tilde{E}$ este o măsură spectrală. În sfîrșit, să considerăm aplicația

$$E(S) = \tilde{E}(S), \quad S \in \mathrm{Bor}(\mathbf{R}). \tag{3.2.5}$$

Vom demonstra că E este măsura spectrală căutată.

Pentru a obține faptul că E este măsură spectrală va fi suficient să probăm egalitatea $E(\mathbf{R}) = 1$; celelalte cerințe din definiția măsurii spectrale sînt evident verificate, deoarece $\tilde{E}$ este măsură spectrală.

Remarcăm că $\tilde{E}(\{\infty\}) = \tilde{E}_N(\{0\}) = E_N(\{0\})$. Să presupunem acum că $E_N(\{0\}) \neq 0$. Atunci există un vector $x_0 \in H \setminus \{0\}$ astfel încît $x_0 = E_N(\{0\})x_0$. Utilizînd reprezentarea integrală a operatorului normal N (teorema 3.2.6), vom putea scrie că

$$Nx_0 = \left(\int_{\sigma(N,H)} z \, \mathrm{d}E_N(z) \right) x_0 =$$

$$= \left(\int_{\sigma(N,H)} z \, \mathrm{d}E_N(z) \right) \left(\int_{\sigma(N,H)} \chi_{\{0\}}(z) \, \mathrm{d}E_N(z) \right) x_0 =$$

$$= \left(\int_{\sigma(N,H)} z \, \chi_{\{0\}}(z) \, \mathrm{d}E_N(z) \right) x_0 = 0,$$

deoarece $z\chi_{\{0\}}(z) \equiv 0$. Aceasta arată că

$$(\mathrm{i} - A)\, Nx_0 = 0 = (\mathrm{i} - A)^{-1} x_0 = x_0,$$

ceea ce este o contradicție. Așadar, $E_N(\{0\}) = 0 = (\tilde{E}\{\infty\})$. De aici deducem

$$E(\mathbf{R}) = \tilde{E}(\mathbf{R}) + \tilde{E}(\{\infty\}) = \tilde{E}(\mathbf{R}_\infty) = 1,$$

ceea ce arată că E este o măsură spectrală.

În baza teoremei 2.2.10, pentru orice $f \in B(\mathbf{R})$ putem scrie că

$$\int_{\mathbf{R}} f(t)\, \mathrm{d}E(t) = \int_{\mathbf{R}_\infty} \tilde{f}(t)\, \mathrm{d}\tilde{E}(t) = \int_{\Omega} (f \circ \tilde{\tau})\,(w)\, \mathrm{d}\tilde{E}_N(w) =$$

$$= \int_{\sigma(N,H)} (f \circ \tilde{\tau})(w)\, \mathrm{d}E_N(w),$$

unde $\tilde{f}$ este o extensie arbitrară a lui f la $\mathbf{R}_\infty$. În particular,

$$N = \int_{\sigma(N,H)} w \mathrm{d}E_N(w) = \int_{\mathbf{R}} (\mathrm{i} - t)^{-1}\, \mathrm{d}E(t),$$

adică relația (3.2.2), ceea ce încheie demonstrația.

Sîntem acum în măsură să enunțăm și să demonstrăm *teorema spectrală pentru operatorii autoadjuncți (nemărginiți)*, variantă a teoremei 2.3.6, bazată însă pe demonstrația acesteia din urmă. Pentru măsurile scalare atașate unei măsuri spectrale vom utiliza notația (2.2.4).

3.2.6. TEOREMĂ. *Fie $A \in \mathscr{C}(H)$ un operator autoadjunct. Există atunci o măsură spectrală $E : \mathrm{Bor}(\mathbf{R}) \to \mathscr{A}(H)$ cu următoatele proprietăți :*

(1) $$D(A) = \left\{ x \in H : \int_{\mathbf{R}} t^2\, \mathrm{d}\langle E(t)x, x\rangle < \infty \right\};$$

(2) $$Ax = \lim_{k \to \infty} \left(\int_{-k}^{k} t\, \mathrm{d}E(t) \right) x, \quad x \in D(A).$$

Demonstrație. Dacă $A \in \mathscr{L}(H)$, existența măsurii E (extinsă de la $\mathrm{Bor}(\sigma(A, H))$ la $\mathrm{Bor}(\mathbf{R})$ ca în demonstrația propoziției 3.2.5) se obține direct din teorema 2.3.6), iar relațiile (1) și (2) se comprimă în egalitatea

$$Ax = \left(\int_{\mathbf{R}} t\, \mathrm{d}E(t) \right) x, \quad x \in H,$$

dată de aceeași teoremă. Va fi deci suficient să presupunem că $A \in \mathscr{C}(H) \setminus \mathscr{L}(H)$. Vom nota, ca în demonstrația propoziției 3.2.5, cu N operatorul

normal $(i - A)^{-1}$, cu E_N măsura spectrală a lui N și cu E măsura spectrală (3.2.5), arătînd că E satisface (1) și (2).

Fie deci un vector $x \in D(A)$ și să notăm $y = (i - A)x$. Avem atunci $x = (i - A)^{-1}y = Ny$, deci putem scrie că

$$x = \left(\int_{\tau(H,N)} z \, dE_N(z) \right) y = \left(\int_{\mathbf{R}} (i - t)^{-1} \, dE(t) \right) y,$$

în baza formulei (3.2.2). De aici deducem

$$\left(\int_{|t|<k} t \, dE(t) \right) x = \left(\int_{|t|<k} t \, dE(t) \right) \left(\int_{\mathbf{R}} (i - t)^{-1} \, dE(t) \right) y =$$

$$= \left(\int_{|t|<k} t(i - t)^{-1} \, dE(t) \right) y.$$

În virtutea propoziției 2.2.12(3), putem scrie apoi că

$$\left\| \left(\int_{|t|<k} t \, dE(t) \right) x \right\|^2 = \int_{|t|<k} t^2 \, d\langle E(t) \, x, x \rangle.$$

În baza teormei de convergență dominată a lui Lebesgue (teorema 0.4.17) și utilizînd calculele de mai sus, vom avea

$$\lim_{k \to \infty} \int_{|t|<k} t^2 \, d\langle E(t)x, x \rangle = \lim_{k \to \infty} \left\| \left(\int_{|t|<k} t \, dE(t) \right) x \right\|^2 =$$

$$= \lim_{k \to \infty} \left\| \left(\int_{|t|<k} t(i - t)^{-1} \, dE(t) \right) y \right\|^2 =$$

$$= \lim_{k \to \infty} \int_{|t|<k} |t(i - t)^{-1}|^2 \, d\langle E(t) \, y, y \rangle =$$

$$= \int_{\mathbf{R}} |t(i - t)^{-1}|^2 \, d\langle E(t) \, y, y \rangle < \infty,$$

deoarece funcția $t \to t(i - t)^{-1}$ este continuă, și mărginită pe $\mathbf{R}$. Lema lui Fatou (teorema 0.4.16) ne asigură atunci că

$$\int_{\mathbf{R}} t^2 \, d\langle E(t) \, x, x \rangle \leqslant \lim_{k \to \infty} \int_{|t|<k} t^2 \, d\langle E(t) \, x, x \rangle < \infty,$$

ceea ce dovedește că $D(A)$ este conținut în membrul drept al relației (1).

Vom demonstra acum incluziunea inversă. Să notăm, pentru simplitate, cu I_k mulțimea $\{t \in \mathbf{R} : |t| \leqslant k\}$. Mai întîi să remarcăm că

$$E(I_k) = (\mathrm{i} - A)^{-1} \int_{I_k} (\mathrm{i} - t)\, \mathrm{d}E(t), \tag{3.2.6}$$

deoarece

$$\int_{I_k} \mathrm{d}E(t) = \left(\int_{\mathbf{R}} (\mathrm{i} - t)^{-1}\ \mathrm{d}E(t) \right) \left(\int_{I_k} (\mathrm{i} - t)\, \mathrm{d}E(t) \right)$$

și avem egalitatea (3.2.2). Relația (3.2.6) ne arată, în particular, că $E(I_k)(H) \subset R((i - A)^{-1}) \subset D(A)$. Mai facem observația că

$$\lim_{k \to \infty} E(I_k)\, x = x, \qquad x \in H, \tag{3.2.7}$$

ceea ce se obține din lema 2.2.4.

Fie $x \in H$ un vector aflat în membrul al doilea al relației (2); cu alte cuvinte, funcția $t \to t^2$ este integrabilă pe $\mathbf{R}$ în raport cu măsura scalară $S \to \langle E(S)\, x, x \rangle$. Din egalitatea (3.2.6) deducem

$$AE(I_k)x = A(\mathrm{i} - A)^{-1} \left(\int_{I_k} (\mathrm{i} - t)\, \mathrm{d}E(t) \right) x =$$

$$= -\left(\int_{I_k} (\mathrm{i} - t)\, \mathrm{d}E(t) \right) x + \mathrm{i}(\mathrm{i} - A)^{-1} \left(\int_{I_k} (\mathrm{i} - t)\, \mathrm{d}E(t) \right) x =$$

$$= -\left(\int_{I_k} (\mathrm{i} - t)\, \mathrm{d}E(t) \right) x + \left(\mathrm{i} \int_{I_k} \mathrm{d}E(t) \right) x = \left(\int_{I_k} t\, \mathrm{d}E(t) \right) x.$$

Vom arăta apoi că șirul $y_k = \left(\int_{I_k} t\, \mathrm{d}E(t) \right) x$ este convergent în H. Într-adevăr, dacă $m > k$,, atunci

$$\|y_m - y_k\|^2 = \left\| \left(\int_{I_m \setminus I_k} t\, \mathrm{d}E(t) \right) x \right\|^2 = \int_{I_m \setminus I_k} t^2\, \mathrm{d}\langle E(t)x, x \rangle,$$

prin utilizarea propoziției 2.2.12(3). Din integrabilitatea funcției $t \to t^2$ rezultă atunci că

$$\lim_{m,k \to \infty} \int_{I_m \setminus I_k} t^2 \mathrm{d}\langle E(t)x, x \rangle = 0,$$

deci convergența șirului $\{y_k\}_k$. Rescriind observațiile de mai sus, observăm că șirul $x_k = E(I_k)x \to x$ $(k \to \infty)$ din (3.2.7), și că șirul $y_k = Ax_k = AE(I_k)x$ este și el convergent. Operatorul A fiind închis, deducem că

$x \in D(A)$ şi că

$$Ax = \lim_{k\to\infty} y_k = \lim_{k\to\infty} \left(\int_{I_k} t \, dE(t) \right) x,$$

ceea ce completează demonstraţia egalităţii (1) şi stabileşte şi relaţia (2), încheind astfel demonstraţia teoremei.

Ca şi în cazul operatorilor continui (corolarul 2.4.5, propoziţia 2.4.7), avem şi de astă dată o teoremă de unicitate a măsurii spectrale ataşate unui operator autoadjunct prin teorema 3.2.6.

3.2.7. TEOREMĂ. *Fie $A \in \mathscr{C}(H)$ un operator autoadjunct. Dacă $F : \mathrm{Bor}(\mathbf{R}) \to \mathscr{A}(H)$ este o măsură spectrală satisfăcînd condiţiile* (1) *şi* (2) *din teorema* 3.2.6, *atunci F coincide cu E.*

Demonstraţie. În baza propoziţiei 2.4.7, ne putem limita la cazul cînd A este operator nemărginit.

Cu notaţia $I_m = \{t \in \mathbf{R} : |t| < m\}$, din (1) rezultă că oricare ar fi $x \in H$ avem $F(I_m)x \in D(A)$, deoarece

$$\int_{\mathbf{R}} t^2 \, d \langle F(t) F(I_m)x, \; F(I_m)x \rangle =$$

$$= \left\| \left(\int_{\mathbf{R}} t \, dF(t) \right) F(I_m) \, x \right\|^2 = \left\| \left(\int_{I_m} t \, dF(t) \right) x \right\|^2 < \infty$$

prin utilizarea propoziţiei 2.2.12(3)). Apoi, pe baza relaţiei (2),

$$(\mathrm{i} - A) F(I_m) \, x = \lim_{k\to\infty} \left(\int_{I_k} (\mathrm{i} - t) \, dF(t) \right) F(I_m)x =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(\int_{I_k} \chi_{Im}(t) \, (\mathrm{i} - t) \, dF(t) \right) x = \left(\int_{I_m} (\mathrm{i} - t) \, dF(t) \right) x.$$

Deoarece

$$F(I_m) = \left(\int_{I_m} (\mathrm{i} - t) \, dF(t) \right) \left(\int_{I_m} (\mathrm{i} - t)^{-1} \, dF(t) \right),$$

rezultă

$$F(I_m) = (\mathrm{i} - A) F(I_m) \int_{I_m} (\mathrm{i} - t)^{-1} \, dF(t) = (\mathrm{i} - A) \int_{I_m} (\mathrm{i} - t)^{-1} \, dF(t),$$

de unde

$$(\mathrm{i} - A)^{-1} F(I_m) = \int_{I_m} (\mathrm{i} - t)^{-1} \, dF(t).$$

Trecînd la limită în această ultimă relaţie, deducem

$$Nx = (\mathrm{i} - A)^{-1} x = \left(\int_{\mathbf{R}} (\mathrm{i} - t)^{-1} \, \mathrm{d}F(t) \right) x, \quad x \in H, \tag{3.2.8}$$

ceea ce este posibil deoarece $t \to (\mathrm{i} - t)^{-1}$ este o funcţie continuă şi mărginită pe $\mathbf{R}$ (exerciţiul 3.9.5).

Vom face acum apel la notaţia (şi discuţia) din demonstraţia propoziţiei 3.2.5. Vom defini o măsură spectrală $\tilde{F}_N$ pe mulţimea $\Omega = \tilde{\theta}(\mathbf{R}_\infty)$ prin relaţia

$$\tilde{F}_N(L) = \tilde{F}(\tilde{\theta}^{-1}(L)), \quad L \in \mathrm{Bor}(\Omega), \tag{3.2.9}$$

unde $\tilde{F}$ este extensia trivială a lui F la $\mathrm{Bor}(\mathbf{R}_\infty)$ [deci $\tilde{F}(\{\infty\}) = 0$], ceea ce este posibil în baza teoremei 2.2.10. Mai mult decît atît, aceeaşi teoremă şi relaţia (3.2.8) ne spun că

$$\int_\Omega w \, \mathrm{d}\tilde{F}_N(w) = \int_{\mathbf{R}_\infty} \tilde{\theta}(t) \, \mathrm{d}\tilde{F}(t) = \int_{\mathbf{R}} (\mathrm{i} - t)^{-1} \, \mathrm{d}F(t) = N;$$

prin urmare, $\tilde{F}_N = \tilde{E}_N$, în virtutea propoziţiei 2.4.7. De aici obţinem

$$E(S) = \tilde{E}(S) = \tilde{E}_N(\tilde{\tau}^{-1}(S)) = \tilde{F}_N(\tilde{\tau}^{-1}(S)) = \tilde{F}(\theta^{-1}(\tilde{\tau}^{-1}(S))) =$$
$$= \tilde{F}(S) = F(S),$$

oricare ar fi $S \in \mathrm{Bor}(\mathbf{R})$, în care am utilizat definiţiile (3.2.4), (3.2.5), (3.2.9) şi faptul că $\tilde{\theta}$ şi $\tilde{\tau}$ sînt una inversa celeilalte. Demonstraţia este completă.

3.2.8. OBSERVAŢIE. Alegerea operatorului normal $N = N_i = (i - A)^{-1}$ în propoziţia 3.2.5 este oarecum arbitrară. De fapt, putem lua în locul lui N orice operator normal de forma $N_z = (z - A)^{-1}$ $(z \notin \mathbf{R})$. Cu modificări neesenţiale, consideraţiile din propoziţia 3.2.5 şi teorema 3.2.6 funcţionează şi în acest caz. Teorema 3.2.7 ne arată că măsura spectrală astfel construită nu depinde de alegerea operatorului N_z. Ea va fi numită *măsura spectrală* ataşată operatorului autoadjunct $A \in \mathscr{C}(H)$.

3.3. CALCULUL FUNCŢIONAL BORELIAN NEMĂRGINIT

Continuăm discuţia din paragraful precedent. Fie $A \in \mathscr{C}(H)$ un operator autoadjunct şi fie E măsura sa spectrală. Dacă $f \in B(\mathbf{R})$, atunci putem defini operatorul

$$f(A) = \int_{\mathbf{R}} f(t) \, \mathrm{d}E(t) \in \mathscr{L}(H).$$

Această relație definește chiar un omomorfism de C*-algebre de la $B(\mathbf{R})$ în $\mathscr{L}(H)$, în baza teoreei 2.2.8. Se poate ridica următoarea problemă: ce se întîmplă dacă f este o funcție boreliană nemărginită? În acest paragraf vom încerca să răspundem la această întrebare.

Fie deci $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ o funcție boreliană (definiția 0.4.8), nu neapărat mărginită. Vom asocia acestei funcții șirul de funcții trunchiate

$$f_k(t) = \begin{cases} f(t), & \text{dacă } |f(t)| \leqslant k, \\ 0, & \text{dacă } |f(t)| > k, \ k = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Atunci $f_k \in B(\mathbf{R})$ și deci putem defini operatorul $f_k(A) \in \mathscr{L}(H)$. Vom defini operatorul $f(A)$ (în general nemărginit) în felul următor:

$$D(f(A)) = \{x \in H : \lim_{k\to\infty} f_k(A)x \text{ există în } H\},$$

$$f(A)x = \lim_{k\to\infty} f_k(A)x, \ x \in D(f(A)). \tag{3.3.1}$$

În particular, dacă $f(t) = t$, atunci

$$f_k(A) = \int_{-k}^{k} t \, \mathrm{d}E(t),$$

deci $f(A) = A$ în virtutea teoremei 3.2.6.

3.3.1. TEOREMĂ. *Fie $A \in \mathscr{C}(H)$ un operator autoadjunct, fie E: $\mathrm{Bor}(\mathbf{R}) \to \mathscr{A}(H)$ măsura spectrală a lui A și fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ o funcție boreliană arbitrară. Atunci $f(A)$ este un operator liniar, închis și dens definit, cu următoarele proprietăți:*

(1) $\|f(A)x\|^2 = \int_{\mathbf{R}} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}\langle E(t)\, x, x\rangle, \ x \in D(f(A))$;

(2) $D(f(A)) = \left\{ x \in H : \int_{\mathbf{R}} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}\langle E(t)x, x\rangle < \infty \right\}$;

(3) $f(A)^* = \overline{f}(A)$.

Demonstrație. Din modul în care a fost definit (definiția (3.3.1), este limpede că $f(A)$ este operator liniar. Să arătăm că $f(A)$ este dens definit și închis. Pentru aceasta, vom nota cu S_k mulțimea $\{t \in \mathbf{R} : |f(t)| \leqslant k\}$. Atunci, pentru un m fixat, din (3.3.1) deducem

$$\lim_{k\to\infty} f_k(A)E(S_m)x = f_m(A)x,$$

prin urmare, $E(S_m)x \in D(f(A))$ și

$$f(A)\, E(S_m)x = f_m(A)x, \quad x \in H. \tag{3.3.2}$$

Asemănător, dacă $x \in D(f(A))$, același argument ne arată că

$$E(S_m) f(A)x = f_m(A)x. \tag{3.3.3}$$

Deoarece șirul $\{S_m\}_m$ este crescător și reuniunea sa este mulțimea $\mathbf{R}$, atunci $E(S_m)x \to x$ $(m \to \infty)$ pentru orice $x \in H$, în baza lemei 2.2.4. Așadar, operatorul $f(A)$ este dens definit.

Vom arăta acum că $f(A)$ este un operator închis. Fie deci $\{x_k\}_k \subset D(f(A))$ un șir cu proprietatea că $x_k \to x$ și $f(A)x_k \to y$ cînd $k \to \infty$. Utilizînd relația (3.3.3), putem scrie

$$f_m(A)x = \lim_{k\to\infty} f_m(A)x_k = \lim_{k\to\infty} E(S_m) f(A)x_k = E(S_m)y.$$

Așadar,

$$y = \lim_{m\to\infty} E(S_m)y = \lim_{m\to\infty} f_m(A)x,$$

ceea ce ne arată că $x \in D(f(A))$ și $f(A)x = y$.

Vom demonstra acum celelalte afirmații. Pentru afirmația (1) să observăm că dacă $x \in D(f(A))$, atunci

$$\|f(A)x\|^2 = \lim_{k\to\infty} \|f_k(A)x\|^2 = \lim_{k\to\infty} \int_{S_k} |f(t)|^2 \, d\langle E(t)\, x, x\rangle =$$

$$= \int_{\mathbf{R}} |f(t)|^2 \, d\langle E(t)\, x, x\rangle,$$

în baza propoziției 2.2.12(3), convergența integralelor fiind asigurată de teoremele 0.4.16 și 0.4.17.

Pentru afirmația (2), să remarcăm că dacă $x \in D(f(A))$, atunci x se află în membrul al doilea al relației (2) pe baza relației (1) demonstrate mai sus. Reciproc, dacă $x \in H$ se află în membrul drept al relației (2) atunci, pentru $m > k$, avem

$$\|f_m(A)x - f_k(A)x\|^2 = \int_{S_m \setminus S_k} |f(t)|^2 \, d\langle E(t)\, x, x\rangle$$

și membrul drept tinde la zero cînd $m, k \to \infty$ (teorema 0.4.17), deci limita din (3.3.1) există.

În sfîrșit, vom demonstra egalitatea (3). Din (1) rezultă că $D(f(A)) = D(\bar{f}(A))$. Fie deci $x, y \in D(f(A))$. Atunci

$$\langle f(A)\, x, y\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle f_k(A)\, x, y\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle x, \bar{f}_k\,(A)y\rangle = \langle x, \bar{f}(A)y\rangle,$$

deoarece $f_k(A)^* = \bar{f}_k(A)$, funcțiile fiind boreliene și mărginite. Acest calcul ne arată că $f(A)^* \supset \bar{f}(A)$.

Invers, fie $y \in D(f(A)^*)$. Dacă $x \in H$ este arbitrar, atunci

$$\langle x, E(S_k) f(A)^* y\rangle = \langle f(A)E(S_k)x, y\rangle = \langle f_k(A)\, x, y\rangle = \langle x, \bar{f}_k(A)y\rangle$$

în care am folosit relația (3.3.2), prin urmare

$$\overline{f}_k(A)y = E(S_k)\, f(A)^* y.$$

Trecînd la limită după k în această ultimă relație, deoarece limita din membrul al doilea există, deducem că $y \in D(f(A))$ și că $\overline{f}(A)y = f(A)^* y$, ceea ce încheie demonstrația.

3.3.2. OBSERVAȚIE. Definiția 3.3.1 nu depinde de șirul $\{S_k\}_k \subset \subset \mathrm{Bor}(\mathbf{R})$ (definit în demonstrația teoremei 3.3.1). Cu alte cuvinte, dacă $\{S'_k\}_k \subset \mathrm{Bor}(\mathbf{R})$ este un șir crescător a cărui reuniune este egală cu mulțimea $\mathbf{R}$ și astfel încît $f'_k(t) = \chi_{S'_k}(t) f(t)$ să fie funcție boreliană mărginită pentru fiecare k, atunci

$$f(A) = \lim_{k\to\infty} f'_k(A)x, \quad x \in D(f(A))$$

(exercițiul 3.9.6).

Vom prezenta acum cîteva consecințe ale teoremei 3.3.1.

3.3.3. PROPOZIȚIE. *Fie A un operator autoadjunct în H și fie $f_j : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ $(j = 1, 2)$ funcții boreliene arbitrare. Atunci au loc relațiile:*

(1) $\quad (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(A) \supset \alpha_1 f_1(A) + \alpha_2 f_2(A), \ \alpha_1, \ \alpha_2 \in \mathbf{C}$;

(2) $\quad (f_1 f_2)(A) \supset f_1(A) f_2(A)$.

Demonstrație. Deoarece este ușor de văzut că $(\alpha_j f_j)(A) = \alpha_j f_j(A)$ $(j = 1, 2)$, va fi suficient să demonstrăm (1) doar în cazul cînd $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Fie mulțimile

$$S_k^j = \{t \in \mathbf{R} : |f_j(t)| \leqslant k\} \quad (j = 1, 2; \ k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Atunci $S_k = S_k^1 \cap S_k^2$ este un șir crescător a cărui reuniune este $\mathbf{R}$; în plus, toate funcțiile $\chi_{S_k} f_1$, $\chi_{S_k} f_2$, $\chi_{S_k}(f_1 + f_2)$, $\chi_{S_k}(f_1 f_2)$ sînt mărginite. În baza obsevației 3.3.2, dacă $x \in D(f_1(A)) \cap D(f_2(A))$, atunci

$$\lim_{k\to\infty} \left(\int_{S_k} (f_1(t) + f_2(t))\, \mathrm{d}E(t)\, x = \right.$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(\int_{S_k} f_1(t)\, \mathrm{d}E(t) \right) x + \lim_{k\to\infty} \left(\int_{S_k} f_2(t)\, \mathrm{d}E(t) \right) x =$$

$$= f_1(A)x + f_2(A)x.$$

Așadar, $x \in D((f_1 + f_2)(A))$ și $(f_1 + f_2)(A)x = f_1(A)x + f_2(A)\, x$, adică relația (1).

Fie apoi $x \in D(f_1(A) f_2(A))$, deci $x \in D(f_2(A))$ și $f_2(A)x \in D(f_1(A))$. Avem

$$\lim_{k\to\infty} \left(\int_{S_k} f_1(t) f_2(t)\, \mathrm{d}E(t) \right) x =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(\int_{S_k} f_1(t)\, \mathrm{d}E(t) \right) \left(\int_{S_k} f_2(t)\, \mathrm{d}E(t) \right) x =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \lim_{m\to\infty} \left(\int_{S_k} f_1(t)\, \mathrm{d}E(t) \right) \left(\int_{S_m} f_2(t)\, \mathrm{d}E(t) \right) x =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(\int_{S_k} f_1(t)\, \mathrm{d}E(t) \right) f_2(A)x = f_1(A)\, f_2(A)x.$$

Aşadar, $x \in D((f_1 f_2)(A))$ şi $(f_1 f_2)(A)\, x = f_1(A) f_2(A)x$, adică (2).

3.3.4. COROLAR. *Fie $A \in \mathscr{C}(H)$ un operator autoadjunct, fie E măsura spectrală a lui A şi fie $z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$. Atunci*

$$(z - A)^{-1} = \int_{\mathbf{R}} (z - t)^{-1}\, \mathrm{d}E(t).$$

Demonstraţie. Formula din enunţ este o variantă a relaţiei (3.3.2). Vom prezenta un argument bazat pe rezultatele din acest paragraf.

Integrala din enunţ există deoarece $t \to (z - t)^{-1}$ este o funcţie boreliană şi mărginită pe $\mathbf{R}$. Să notăm cu $R(z)$ valoarea acestei integrale. Din propoziţia precedentă deducem că $R(z)(z - A)x = x$, oricare ar fi $x \in D(A)$, şi că $(z - A)R(z)y = y$, oricare ar fi $y \in D((z - A)\, R(z))$. Avem însă $D((z - A)\, R(z)) = H$, deoarece

$$\int_{\mathbf{R}} t^2\, \mathrm{d}\langle E(t)\, R(z)\, y,\, R(z)\, y\rangle = \int_{\mathbf{R}} t^2 |z - t|^{-2}\, \mathrm{d}\langle E(t)\, y, y\rangle < \infty$$

pentru orice $y \in H$, deci $R(z)\, y \in D(A)$.

3.4. PRELUNGIREA OPERATORILOR SIMETRICI

Verificarea faptului că un operator nemărginit este autoadjunct constituie adesea o operaţie dificilă. Există însă unele condiţii mai simple care ne asigură că anumiţi operatori liniari se pot extinde pînă la operatori autoadjuncţi. Găsirea unor asemenea situaţii formează obiectul acestei secţiuni, precum şi al celei care urmează. Vom continua să notăm cu H un spaţiu Hilbert fixat. Cuvîntul „extensie" nu va exclude egalitatea.

3.4.1. DEFINIŢIE. Fie $T : D(T) \subset H \to H$ un operator liniar, dens definit. Vom spune că T este *simetric* dacă $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ pentru toţi $x, y \in D(T)$.

Este clar că pentru orice operator simetric T avem $T^* \supset T$. În general însă $T^* \neq T$, după cum rezultă din unele exemple simple (a se vedea exerciţiul 3.9.7).

3.4.2. OBSERVAȚIE. Dacă T este un operator simetric, atunci T este preînscris deoarece $T \subset T^*$ și T^* este totdeauna închis (lema 3.1.2). Din acest motiv, fără a micșora generalitatea, vom presupune de aici înainte că un operator simetric dat este automat închis, deoarece îl putem eventual înlocui cu închiderea sa canonică (definiția 0.3.2), ceea ce păstrează proprietatea de a fi simetric.

Vom utiliza în această secțiune o anumită transformare, prin care operatorii simetrici trec într-o clasă de operatori care pot fi manevrați mai ușor. Mai întîi vom defini această nouă clasă și vom preciza cîteva proprietăți ale ei.

3.4.3. DEFINIȚII. Fie $H_\pm$ subspații liniare, închise în H. Un operator $V \in \mathscr{L}(H_+, H_-)$ se numește *izometrie parțială* în H (cu *spațiul inițial* H_+ și cu *spațiul final* H_-) dacă V este o aplicație unitară de la H_+ pe H_-. Dimensiunile spațiilor $H_\pm^\perp$ se numesc *indicii de defect* ai izometriei parțiale V.

Izometria parțială V poate fi privită, în particular, ca un operator din $\mathscr{C}(H)$, cu $D(V) = H_+$ și cu $R(V) = H_-$.

3.4.4. LEMĂ. *Izometria parțială V se extinde la un operator unitar pe H dacă și numai dacă indicii de defect ai lui V sînt egali.*

Demonstrație. Se știe că două spații Hilbert sînt unitar echivalente dacă și numai dacă au aceeași dimensiune (exercițiul 0.6.18). Dacă dimensiunile spațiilor $H_+^\perp$ și $H_-^\perp$ sînt egale, atunci există o aplicație unitară W a lui $H_+^\perp$ pe $H_-^\perp$, și deci operatorul $U = V \oplus W \in \mathscr{L}(H)$ este unitar pe H.

Reciproc, dacă V admite o extensie unitară $U \in \mathscr{L}(H)$, atunci $U(H_+^\perp) = H_-^\perp$, deci $H_+^\perp$ și $H_-^\perp$ au aceeași dimensiune.

3.4.5. LEMĂ. *Fie T un operator simetric. Atunci $H_\pm = R(T \pm \mathrm{i})$ sînt subspații închise în H și $V = (T - \mathrm{i})(T + \mathrm{i})^{-1}$ este o izometrie parțială a lui H cu spațiul inițial H_+ și cu spațiul final H_-.*

Demonstrație. Să remarcăm mai întîi că pentru orice $x \in D(T)$, folosind faptul că T este simetric, putem deduce

$$\|(T \pm \mathrm{i})x\|^2 = \|Tx\|^2 \pm \mathrm{i}\langle x, Tx\rangle \mp \mathrm{i}\langle Tx, x\rangle + \|x\|^2 = \\ = \|Tx\|^2 + \|x\|^2. \tag{3.4.1}$$

Relația (3.4.1) ne spune atît că operatorii $T \pm \mathrm{i}$ sînt injectivi, cît și faptul că $H_\pm = R(T \pm \mathrm{i})$ sînt subspații închise în H, în care utilizăm ipoteza că T este un operator închis (lăsăm acest raționament pe seama cititorului, ca exercițiu).

Deoarece orice $y \in H_+$ se reprezintă sub forma $y = (T + \mathrm{i})x$, unde $x \in D(T)$ este unic determinat, vom putea defini $Vy = (T - \mathrm{i})x$. Tot din (3.4.1) deducem

$$\|Vy\| = \|(T - \mathrm{i})x\| = \|(T + \mathrm{i})x\| = \|y\|,$$

prin urmare, V este o izometrie. Dacă $w \in H_-$, atunci există un vector unic determinat $v \in D(T)$ astfel încît $w = (T - \mathrm{i})v$. Întrucît elementul $y = (T + \mathrm{i})v$ satisface ecuația $Vy = w$, rezultă $R(V) = H_-$, deci V este o aplicație unitară a lui H_+ pe H_-.

3.4.6. OBSERVAȚIE. În condițiile lemei precedente, să remarcăm că un vector $x \in H$ este în $D(T)$ dacă și numai dacă există $y \in H_+$ astfel încît $y - Vy = x$. În acest caz, $Tx = \mathrm{i}(y + Vy)$.

Într-adevăr, dacă $x \in D(T)$ și notăm $y_0 = (T + \mathrm{i})\,x$, atunci $y_0 \in H_+$ și $Vy_0 = (T - \mathrm{i})\,x$, ca în lema precedentă. De aici deducem că $(1 - V)y_0 = 2\mathrm{i}x$ și că $(1 + V)y_0 = 2Tx$. Vom putea deci lua $y = (2\mathrm{i})^{-1}\,y_0$.

Invers, fie $x \in H$ astfel încît $x = y - Vy$, unde $y \in H_+$. Atunci $y = (T + \mathrm{i})x_0$, cu $x_0 \in D(T)$, iar $Vy = (T - \mathrm{i})x_0$. Așadar, $x = (T + \mathrm{i})x_0 - (T - \mathrm{i})x_0 = 2\mathrm{i}x_0 \in D(T)$.

3.4.7. LEMĂ. *În condițiile lemei precedente, operatorul T este autoadjunct dacă și numai dacă $H_+ = H_- = H$, deci dacă și numai dacă operatorul V este unitar pe H.*

Demonstrație. Dacă T este autoadjunct, atunci $H_+ = H_- = H$ (propoziția 3.2.3) și deci V este unitar.

Reciproc, să presupunem că V este unitar pe H. Fie $x_* \in D(T^*)$, fie $y_* = T^*x_*$ și fie $x \in D(T)$. Vom scrie $x = y - Vy$ și deci $Tx = \mathrm{i}(y + Vy)$ (observația 3.4.6). Deoarece $\langle Tx, x_*\rangle = \langle x, y_*\rangle$, putem scrie

$$\mathrm{i}\langle y, x_*\rangle + \mathrm{i}\langle Vy, x_*\rangle = \langle y, y_*\rangle - \langle Vy, y_*\rangle.$$

Deoarece V este unitar, înlocuind $\langle y, x_*\rangle$ cu $\langle Vy, Vx_*\rangle$ și $\langle y, y_*\rangle$ cu $\langle Vy, Vy_*\rangle$ în egalitatea de mai sus, obținem

$$\langle Vy, -\mathrm{i}Vx_* - \mathrm{i}x_* - Vy_* + y_*\rangle = 0.$$

Atunci cînd x parcurge $D(T)$, vectorul Vy parcurge întreg spațiul $H = R(T - \mathrm{i})$, deci conchidem că

$$-\mathrm{i}Vx_* - \mathrm{i}x_* - Vy_* + y_* = 0,$$

relație care se poate scrie fie sub forma $x_* = (1 - V)(2^{-1}(x_* - \mathrm{i}y_*))$, fie sub forma $y_* = \mathrm{i}(1 + V)(2^{-1}(x_* - \mathrm{i}y_*))$. În baza observației 3.4.6, putem afirma că $x_* \in D(T)$ și că $Tx_* = y_*$. Aceasta ne arată că $T_* \subset T$. Relația inversă fiind trivial satisfăcută, obținem faptul că T este autoadjunct.

3.4.8. DEFINIȚIE. Fie $T \in \mathscr{C}(H)$ un operator simetric. Izometria parțială $V \in \mathscr{L}(H_+, H_-)$ dată de lema 3.4.5 va fi numită *transformata Cayley* a operatorului T.

3.4.9. LEMĂ. *Fie $U \in \mathscr{L}(H)$ un operator unitar astfel încît $1 - U$ să fie injectiv. Există atunci un operator autoadjunct $A \in \mathscr{C}(H)$ a cărui transformată Cayley să fie operatorul U.*

Demonstrație. Din faptul că $1 - U$ este injectiv, rezultă că și $1 - U^*$ este injectiv. Într-adevăr, dacă $U^*x = x$, atunci $UU^*x = x = Ux$, deci $x = 0$. Avem deci $\overline{R(1 - U)} = N(1 - U^*)^{\perp} = H$, în baza lemei 3.1.7. Așadar, $(1 - U)^{-1}$ există și este dens definit.

Vom defini acum operatorul $A = \mathrm{i}(1 + U)(1 - U)^{-1}$ pe $D(A) = R(1 - U)$. Să observăm că A este un oerator simetric. Într-adevăr, dacă $x,\ y \in D(A)$, atunci $x = (1 - U)v$ și $y = (1 - U)w$, deci $Ax = \mathrm{i}(1 + U)v$ și $Ay = \mathrm{i}(1 + U)w$. Avem

$$\langle Ax, y\rangle = \langle \mathrm{i}(1 + U)\, v, (1 - U)w\rangle = \langle \mathrm{i}(U - U^*)v, w\rangle =$$

$$= \langle -\mathrm{i}(U^* - U)\, v, w\rangle = \langle (1 - U)v, \mathrm{i}(1 + U)\, w\rangle = \langle x, Ay\rangle,$$

ceea ce arată că A este operator simetric.

Să arătăm în continuare că A este operator închis. Într-adevăr, dacă $x_k = (1 - U)v_k \in D(A)$ este un șir cu proprietatea că $x_k \to x$ și $Ax_k = \mathrm{i}(1 + U)v_k \to y$ cînd $k \to \infty$, atunci șirul $v_k = 2^{-1}(x_k - \mathrm{i}Ax_k)$ converge către $v = 2^{-1}(x - \mathrm{i}y)$, deci $x = (1 - U)v \in D(A)$ și $Ax = \mathrm{i}(1 + U)\, v = y$.

Operatorul A fiind simetric și închis, vom putea vorbi de transformata sa Cayley, pe care o vom nota cu W. Operatorul W este definit pe spațiul $R(A + \mathrm{i})$. Să remarcăm însă că dacă $v \in H$ este arbitrar, atunci $x = (1 - U)v \in D(A)$ și $Ax = \mathrm{i}(1 + U)v$. Notînd $y = (A + \mathrm{i})x$, avem $y = \mathrm{i}(1 + U)v + \mathrm{i}(1 - U)v = 2\mathrm{i}v \in R(A + \mathrm{i})$ și deci $Wy = (A - \mathrm{i})x = \mathrm{i}(1 + U)v - \mathrm{i}(1 - U)\, v = 2\mathrm{i}Uv = Uy$, ceea ce arată că $W = U$. Așadar, transformata Cayley a lui A este chiar operatorul unitar U, ceea ce implică faptul că A este autoadjunct, în virtutea lemei 3.4.7.

Vom sintetiza toate rezultatele obținute în acest paragraf într-o teoremă datorată lui J. von Neumann.

3.4.10. **TEOREMĂ.** *Fie $T \in \mathscr{C}(H)$ un operator simetric. O condiție necesară și suficientă pentru ca T să admită o extensie autoadjunctă este ca indicii de defect ai transformatei Cayley a lui T să fie egali.*

Demonstrație. Fie V transformata Cayley a lui T. Să presupunem că T admite o extensie autoadjunctă A. Atunci transformata Cayley U a lui A este un operator unitar pe H, în baza lemei 3.4.7. Să observăm că U este o extensie a lui V. Într-adevăr, dacă $y = (T + \mathrm{i})x$ cu $x \in D(T)$, atunci $y = (A + \mathrm{i})x$, prin urmare $Uy = (A - \mathrm{i})\, x = (T - \mathrm{i})\, x = Vx$. Din lema 3.4.4 obținem atunci că indicii de defect ai lui V sînt egali.

Reciproc, dacă indicii de defect ai lui V sînt egali, tot din lema 3.4.4 știm că operatorul V se extinde la un operator unitar U pe H. Să observăm că $1 - U$ este injectiv. Fie deci $v \in H$ astfel încît $(1 - U)v = 0$. Fie, de asemenea, $x \in H$ și $y = (1 - U)x$. Atunci

$$\langle v,\ y\rangle = \langle v,\ x\rangle - \langle v,\ Ux\rangle = \langle Uv,\ Ux\rangle - \langle v, Ux\rangle =$$

$$= \langle -(1 - U)\, v, Ux\rangle = 0.$$

Așadar, vectorul v este ortogonal pe $R(1 - U)$, deci cu atît mai mult pe $R(1 - V) = D(T)$ (observația 3.4.6). Deoarece $D(T)$ este dens în H, rezultă $v = 0$. În virtutea lemei 3.4.9, operatorul U este transformata Cayley a unui operator autoadjunct A. Nu ne rămîne decît să probăm că A extinde pe T. Într-adevăr, dacă $x \in D(T)$, atunci $x = y - Vy =$

$= (1 - U)y$ pentru un anume $y \in R(T + \mathrm{i})$. Atunci $Ax = \mathrm{i}(y + Uy) = \mathrm{i}(y + Vy) = Tx$ (observația 3.4.6), ceea ce încheie demonstrația teoremei.

3.4.11. COROLAR. *Fie $T \in \mathscr{C}(H)$ un operator simetric. Operatorul T admite o extensie autoadjunctă dacă și numai dacă subspațiile $N(T^* + \mathrm{i})$ și $N(T^* - \mathrm{i})$ au aceeași dimensiune.*

Demonstrație. Cu notația lemei 3.4.5, avem $H_{\pm} = R(T \pm \mathrm{i})$, deci $H_{\pm}^{\perp} = R(T \pm \mathrm{i})^{\perp} = N(T^* \mp \mathrm{i})$ (lema 3.1.7). Așadar, indicii de defect ai lui V sînt dați de dimensiunea spațiilor $N(T^* \pm \mathrm{i})$.

3.5. OPERATORI SIMETRICI SEMIMĂRGINIȚI

În acest paragraf continuăm studiul extinderii unor operatori simetrici pînă la operatori autoadjuncți, început în paragraful precedent.

3.5.1. DEFINIȚII. Fie $T : D(T) \subset H \to H$ un operator liniar. Vom spune că T este *mărginit inferior* (respectiv *mărginit superior*) de constanta $c \in \mathbf{R}$ dacă $\langle Tx, x\rangle \geqslant c\|x\|^2$ (respectiv $\langle Tx, x\rangle \leqslant c\|x\|^2$), oricare ar fi $x \in D(T)$.

Vom spune că T este *semimărginit* dacă T este mărginit inferior sau superior (de o anumită constantă reală).

Vom spune că T este *pozitiv* (respectiv *negativ*) dacă $\langle Tx, x\rangle \geqslant 0$ (respectiv $\langle Tx, x\rangle \leqslant 0$), oricare ar fi $x \in D(T)$.

Este limpede că T este pozitiv (negativ) dacă și numai dacă T este mărginit inferior (superior) de constanta $0 \in \mathbf{R}$. Invers, T este mărginit inferior (superior) de constanta $c \in \mathbf{R}$ dacă și numai dacă $T - c$ este pozitiv (negativ).

3.5.2. LEMĂ. *Fie $T : D(T) \subset H \to H$ un operator semimărginit. Atunci T este simetric.*

Demonstrație. Vom presupune mai întîi că T este pozitiv. Pe baza relației de polarizare (exercițiul 0.6.11) vom putea scrie

$$\langle Tx, y\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \langle T(x + \mathrm{i}^k y),\ x + \mathrm{i}^k y\rangle =$$

$$= \frac{1}{4}\overline{\sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^{-k} \langle T(y + \mathrm{i}^{-k}x),\ y + \mathrm{i}^{-k}x\rangle} = \overline{\langle Ty, x\rangle} = \langle x, Ty\rangle,$$

oricare ar fi $x, y \in D(T)$, deoarece $\langle T(x + \mathrm{i}^k y),\ x + \mathrm{i}^k y\rangle$ sînt numere reale (de fapt, pozitive.) Așadar, T este simetric.

Dacă T este mărginit inferior (superior) de constant a $c \in \mathbf{R}$, atunci aplicăm raționamentul precedent operatorului pozitiv $T - c$ (respectiv $c - T$). Din faptul că $T - c$ (respectiv $c - T$) este simetric, deducem ușor că însuși T este simetric.

3.5.3. OBSERVAȚIE. Orice operator semimărginit este preînchis, deoarece este simetric (observația 3.4.2). Din acest motiv, fără a micșora generalitatea, vom presupune de aici înainte că un operator semimărginit dat este închis, deoarece îl putem înlocui, dacă este nevoie, cu închiderea sa canonică. Se vede ușor că această înlocuire păstrează proprietatea de semimărginire și nu modifică nici constanta din definiția 3.5.1.

3.5.4. OBSERVAȚIE. Fie D un spațiu prehilbertian (definiția 0.2.5) cu norma $\|\cdot\|_0$. Vom nota cu $c(D)$ familia tuturor șirurilor fundamentale (în raport cu norma $\|\cdot\|_0$) formate cu elemente din D și cu $c_0(D)$ familia șirurilor din D care converg la zero. Atunci $c(D)$ are structură naturală de spațiu liniar (indusă de operațiile obișnuite de adunare și de înmulțire cu scalari ale șirurilor) și $c_0(D)$ este un subspațiu al său. Spațiul factor $H_0 = c(D)/c_0(D)$ poate fi privit ca fiind completatul spațiului D în sensul teoremei 0.2.14 (partea a doua). Norma pe spațiul completat H_0 este dată de egalitatea

$$\|\xi + c_0(D)\|_0 = \lim_{k\to\infty} \|x_k\|_0, \quad \xi = \{x_k\}_{k\geqslant 1} \in c(D), \tag{3.5.1}$$

expresie care nu depinde de șirul particular ξ ce reprezintă clasa $\xi + c_0(D)$, și care transformă pe H_0 într-un spațiu Hilbert. Produsul scalar asociat normei (3.5.1) este de forma

$$\langle \xi + c_0(D), \eta + c_0(D)\rangle_0 = \lim_{k\to\infty} \langle x_k, y_k\rangle_0, \tag{3.5.2}$$

unde $\xi = \{x_k\}_k$, $\eta = \{y_k\}_k$ sînt șiruri arbitrare din $c(D)$. Definiția (3.5.2) nu depinde nici ea de șirurile particulare ξ și η ce reprezintă clasele $\xi + c_0(D)$ și, respectiv $\eta + c_0(D)$. Notăm cu ξ_x șirul constant $\{x, x, x, \ldots\}$ pentru fiecare $x \in D$; atunci aplicația $D \ni x \to \xi_x + c_0(D) \in H_0$ este o izometrie liniară (deci este, în particular, injectivă) iar imaginea sa este submulțime densă în spațiul H_0(a se vedea exercițiul 3.9.9).

Rezultatul de extensie care urmează a fost demonstrat de către Friedrichs.

3.5.5. TEOREMĂ. *Fie $T \in \mathscr{C}(H)$ un operator pozitiv. Atunci există un operator autoadjunct și pozitiv $A \in \mathscr{C}(H)$ care extinde operatorul T.*

Demonstrație. Deoarece operatorul T este pozitiv, expresia

$$\langle x, y\rangle_0 = \langle x, y\rangle + \langle Tx, y\rangle, \quad x, y \in D(T), \tag{3.5.3}$$

definește un produs scalar pe spațiul liniar $D = D(T)$. Acest produs scalar induce norma

$$\|x\|_0^2 = \|x\|^2 + \langle Tx, x\rangle, \quad x \in D. \tag{3.5.4}$$

Vom nota cu H_0 spațiul Hilbert obținut prin completarea spațiului D în raport cu norma (3.5.4) (observația 3.5.4). Vom arăta că H_0 poate fi identificat cu un subspațiu liniar al lui H. Anume, fie D_0 submulțimea acelor

elemente $x \in H$ cu proprietatea că există un şir $\{x_k\}_k$ în D astfel încît $x_k \to x\ (k \to \infty)$ în norma lui H şi $\{x_k\}_k$ este şi fundamental în norma (3.5.4) Este clar că D_0 este un subspaţiu liniar al lui H ce conţine pe D. În continuare, dacă $x \in D_0$ şi $\{x_k\}_k \subset D$ converge către x în H şi este fundamental în norma (3.5.4), vom numi şirul $\{x_k\}_k$ *şir fundamental asociat elementului* x.

Definim apoi o aplicaţie $L : D_0 \to H_0$ prin relaţia $Lx = \{x_k\}_k + c_0(D)$, unde $\{x_k\}_k$ este un şir fundamental asociat lui x (în care folosim notaţia din observaţia 3.5.4).

Vom demonstra în primul rînd că aplicaţia L este corect definită. Cu alte cuvinte, vom arăta că dacă $\{y_k\}_k$ este un alt şir fundamental asociat lui x, atunci $\{x_k\}_k - \{y_k\}_k \in c_0(D)$. Vom nota $v_k = x_k - y_k$. Evident, $v_k \to 0$ $(k \to \infty)$ în H. În plus,

$$\|v_m - v_n\|_0 \leqslant \|x_m - x_n\|_0 + \|y_m - y_n\|_0 \to 0\ (m, n \to \infty),$$

deci $\{v_k\}_k$ este fundamental în norma (3.5.4). În particular, există un $M \geqslant 0$ astfel încît $\|v_k\|_0 \leqslant M$ pentru toţi $k \geqslant 1$. Fie apoi $\varepsilon > 0$ fixat. Vom alege un indice $n(\varepsilon)$ astfel încît $\|v_m - v_n\|_0 < \varepsilon$ dacă $m, n \geqslant n(\varepsilon)$. Pentru astfel de indici m, n avem

$$\|v_n\|_0^2 = \langle v_n, v_n\rangle_0 \leqslant |\langle v_n, v_m\rangle_0| + |\langle v_n, v_n - v_m\rangle_0| \leqslant$$

$$\leqslant |\langle v_n, v_m\rangle_0| + M\varepsilon. \tag{3.5.5}$$

Să remarcăm însă că

$$|\langle v_n, v_m\rangle_0| = |\langle v_n, v_m\rangle + \langle v_n, Tv_m\rangle| \leqslant \|v_n\|\ \|v_m + Tv_m\|,$$

prin urmare

$$\lim_{n\to\infty} |\langle v_n, v_m\rangle_0| = 0.$$

Întorcîndu-ne la evaluarea (3.5.5), obţinem

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|v_n\|_0^2 \leqslant M\varepsilon.$$

Deoarece $\varepsilon > 0$ este arbitrar, rezultă de fapt că $\|v_n\|_0 \to 0$, deci $\{v_n\}_n \in c_0(D)$, ceea ce demonstrează corectitudinea definiţiei aplicaţiei L.

Este uşor de văzut că aplicaţia L este liniară. Vom arăta că L este şi injectivă. Într-adevăr, dacă $Lx = 0$, atunci orice şir fundamental asociat lui x este în $c_0(D)$, deci limita unui asemenea şir în H trebuie să fie zero, deci $x = 0$.

Aplicaţia L este surjectivă. Într-adevăr, dacă $\xi + c_0(D)$ este un element arbitrar din H_0, în baza observaţiei 3.5.4 există un şir $\{\xi_k\}_k$ din $c(D)$, unde ξ_k este un şir constant de forma $\{x_k, x_k, x_k, \ldots\}$ cu $x_k \in D$ pentru orice k, astfel încît $\xi_k + c_0(D) \to \xi + c_0(D)$. Atunci şirul $\{x_k\}_k$ este fundamental în norma (3.5.4), deci şi în norma iniţială a lui H. Dacă x este limita şirului $\{x_k\}_k$ în H, este clar că $x \in D_0$ şi că $Lx = \xi + c_0(D)$.

Aplicația L fiind bijectivă iar spațiul H_0 fiind Hilbert, există pe D_0 o structură de spațiu Hilbert indusă de cea din H_0. Mai precis, putem defini pe D_0 produsul scalar

$$\langle x, y\rangle_0 = \langle Lx, Ly\rangle_0 = \lim_{k\to\infty} \langle x_k, y_k\rangle_0, \quad x, y \in D_0, \tag{3.5.6}$$

unde $\{x_k\}_k$ și $\{y_k\}_k$ sînt șiruri fundamentale asociate elementelor x, respectiv y. Fiind dat de formula (3.5.2), produsul scalar (3.5.6) nu depinde de șirurile fundamentale asociate elementaelor $x, y \in D_0$.

Din acest moment vom începe să ne ocupăm efectiv de problema prelungirii operatorului T. Operatorul T fiind simetric (lema 3.5.2), avem $T \subset T^*$. Vom defini un operator A pe spațiul liniar $D(A) = D(T^*) \cap D_0$ prin egalitatea $Ax = T^*x (x \in D(A))$. Deoarece $D \subset D_0$ și $T^* \supset T$, este clar că A este o extensie a lui T. Ne propunem să arătăm că A este autoadjunct și pozitiv. Vom obține aceste proprietăți în mai multe etape.

Arătăm, mai întîi, că operatorul A este simetric. Fie deci $x, y \in D(A) = D(T^*) \cap D_0$ și fie $\{x_k\}_k$, $\{y_k\}_k$ șiruri fundamentale asociate cu x, respectiv y. Putem scrie că

$$\langle x, Ay\rangle = \langle x, T^*y\rangle = \lim_{k\to\infty}\langle x_k, T^*y\rangle = \lim_{k\to\infty}\langle Tx_k, y\rangle =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\lim_{m\to\infty}\langle Tx_k, y_m\rangle = \lim_{k\to\infty}\lim_{m\to\infty}(\langle x_k, y_m\rangle_0 - \langle x_k, y_m\rangle) =$$

$$= \langle x, y\rangle_0 - \langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle_0 - \langle y, x\rangle} = \overline{\langle y, Ax\rangle} = \langle Ax, y\rangle,$$

deci A este simetric și avem și egalitatea

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, y\rangle_0 - \langle x, y\rangle, \quad x, y \in D(A). \tag{3.5.7}$$

Vom arăta apoi că operatoru $1 + A$ este surjectiv. Pentru aceasta, fie $y \in H$ arbitrar. Aplicația $D_0 \ni x \to \langle x, y\rangle \in \mathbf{C}$ este liniară și continuă pe D_0 deoarece

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\| \leqslant \|x\|_0\,\|y\|, \quad x \in D_0.$$

În baza teoremei de reprezentare 0.3.11, există un vector $v \in D_0$ astfel încît $\langle x, y\rangle = \langle x, v\rangle_0$ pentru toți $x \in D_0$. Dacă însă $x \in D$, deoarece aveam egalitățile

$$\langle x, y\rangle = \langle x, v\rangle_0 = \langle x, v\rangle + \langle Tx, v\rangle = \langle (1 + T)x, v\rangle,$$

[obținute din (3.5.6) și (3.5.6)], rezultă $v \in D(1 + T^*) = D(T^*)$ și $(1 + T^*)v = y$. Așadar, $v \in D(A)$ și $(1 + A)v = y$.

Să observăm că operatorul $1 + A^*$ este injectiv. Într-adevăr, $N((1 + A)^*) = R(1 + A)^\perp = H^\perp = \{0\}$, în virtutea surjectivității lui A și lemei 3.1.7. Avem așadar, $1 + A \subset 1 + A^*$ (deoarece A este simetric) unde $1 + A$ este surjectiv iar $1 + A^*$ este injectiv. Dacă $x \in D(A^*)$, exi-

stă atunci $x_1 \in D(A)$ astfel încît $(1 + A)x_1 = (1 + A^*)x$, deci $(1 + A^*)(x_1 - x) = 0$. De aici, $x = x_1 \in D(A)$, ceea ce înseamnă că și A extinde pe A^*, adică $A = A^*$.

În sfîrșit, din relația (3.5.7) obținem că

$$\langle Ax, x\rangle = \langle x, x\rangle_0 - \langle x, x\rangle \geqslant 0, \quad x \in D(A);$$

prin urmare, A este și pozitiv. Demonstrația este completă.

3.5.6. COROLAR. *Fie $T \in \mathscr{C}(H)$ un operator mărginit inferior (superior) de constanta $c \in \mathbf{R}$. Există atunci un operator autoadjunct $A \in \mathscr{C}(H)$ care extinde pe T și care este de asemenea mărginit inferior (superior) de constanta c.*

Demonstrație. Deoarece T este mărginit inferior (superior) de constanta c, operatorul $T - c$ (respectiv $c - T$) este pozitiv. În baza teoremei precedente, există un operator autoadjunct și pozitiv A_c care extinde pe $T - c$ respectiv $c - T$). Atunci operatorul $A_c + c$ (respectiv $c - A_c$) este un (perator autoadjunct care extinde pe T și este mărginit inferior (supeoior) de constanta c.

3.6. SEMIGRUPURI DE OPERATORI

Întrucît în această secțiune nu avem nevoie de structura specială a spațiilor Hilbert, vom presupune că lucrăm într-un spațiu Banach X.

3.6.1. DEFINIȚIE. O familie $\{T(s)\}_{0<s<\infty} \subset \mathscr{L}(X)$ se numește *semigrup tare continuu* de operatori dacă îndeplinește următoarele condiții:

(1) $T(s_1 + s_2) = T(s_1)T(s_2)$, $s_1, s_2 \geqslant 0$;

(2) $T(0) = 1$;

(3) aplicația $s \to T(s)x$ este continuă pe intervalul $[0, \infty)$ pentru fiecare $x \in X$.

Proprietățile (1) și (2) conferă familiei $\{T(s)\}_{s\geqslant 0}$ calitatea de a fi semigrup de operatori (parametrizat pe semidreapta pozitivă). Condiția (3) este o proprietatea de continuitate în topologia operatorială tare (a se vedea exercițiul 3.9.4), ceea ce explică denumirea de semigrup tare continuu.

3.6.2. EXEMPLU. Fie $B \in \mathscr{L}(X)$ un operator fixat. Să notăm $T(s) = \exp(sB)$, unde $s \geqslant 0$. Este ușor de văzut că familia $\{T(s)\}_{s\geqslant 0}$ este un semigrup tare continuu de operatori. De fapt, aplicația $s \to T(s)$ este continuă chiar în topologia lui $\mathscr{L}(X)$ (deci avem ceea ce numim un *semigrup uniform continuu* de operatori).

Vom considera în cele ce urmează o funcție *subadițivă* $\omega : [0, \infty) \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$, deci o funcție cu proprietatea că $\omega(s_1 + s_2) \leqslant \omega(s_1) + \omega(s_2)$ pentru orice $s_1, s_2 \geqslant 0$.

3.6.3. LEMĂ. *Fie* $\omega : [0, \infty) \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ *o funcție subaditivă. Dacă* ω *este mărginită superior pe fiecare interval compact din mulțimea* $[0, \infty)$ *atunci*

$$\inf_{0<s<\infty} \frac{\omega(s)}{s} = \lim_{s\to\infty} \frac{\omega(s)}{s}.$$

Demonstrație. Fie $\omega_0 = \inf\{\omega(s) : s > 0\}$, deci $\omega_0 \geqslant -\infty$. Vom fixa un număr $\rho > \omega_0$ și vom alege $s_0 > 0$ astfel încît $\omega(s_0)/s_0 < \rho$. Vom reprezenta fiecare număr $s > 0$ sub forma $s = n(s)s_0 + r(s)$, unde $n(s) \geqslant 0$ este întreg iar $0 \leqslant r(s) < s_0$. Atunci

$$\frac{\omega(s)}{s} \leqslant \frac{\omega(n(s)s_0)}{s} + \frac{\omega(r(s))}{s} \leqslant \frac{n(s)\omega(s_0)}{n(s)s_0 + r(s)} + \frac{\omega(r(s))}{s} =$$

$$= \frac{\omega(s_0)}{s_0 + r(s)/n(s)} + \frac{\omega(r(s))}{s}.$$

Deoarece ω este mărginită superior pe intervalul $[0, s_0]$, din calculul de mai sus deducem că

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\omega(s)}{s} \leqslant \frac{\omega(s_0)}{s_0} < \rho.$$

Întrucît $\omega_0 \leqslant \underline{\lim}_{s\to\infty} \omega(s)/s$ și $\rho > \omega_0$ este arbitrar, afirmația este dovedită.

3.6.4. LEMĂ. *Fie* $\{T(s)\}_{s\geqslant 0} \subset \mathscr{L}(X)$ *un semigrup tare continuu. Atunci există limita*

$$\omega_0 = \lim_{s\to\infty} s^{-1} \ln \|T(s)\|.$$

În plus, pentru fiecare număr $\rho > \omega_0$ *există o constantă* $M_\rho \geqslant 1$ *astfel încît* $\|T(s)\| \leqslant M_\rho e^{\rho s}$ $(s \geqslant 0)$.

Demonstrație. Vom defini funcția $\omega(s) = \ln \|T(s)\| (s \geqslant 0)$. Este ușor de văzut că ω este o funcție subaditivă. Vom arăta că ω este mărginită superior pe fiecare interval compact din $[0, \infty)$. Fie $s_0 \geqslant 0$ și fie $x \in X$. Din definiția 3.6.1 (3) rezultă

$$M_x = \sup_{0\leqslant s\leqslant s_0} \|T(s)x\| < \infty.$$

Din principiul mărginirii uniforme (teorema 0.3.5) deducem atunci că

$$M = \sup_{0\leqslant s\leqslant s_0} \|T(s)\| < \infty,$$

de unde rezultă că funcția ω este mărginită superior pe $[0, s_0]$. În baza lemei precedente, $\lim_{s\to\infty} s^{-1} \ln \|T(s)\| = \omega_0$ există.

Să fixăm un număr $\rho > \omega_0$. Este limpede acum că există un număr $s_\rho > 0$ astfel încît $\omega(s) \leqslant \rho s$ dacă $s \geqslant s_\rho$. Atunci $\|T(s)\| \leqslant e^{\rho s}$ pentru $s \geqslant s_\rho$ Notînd

$$M_\rho = \sup_{0 \leqslant s \leqslant s_\rho} e^{-\rho s} \|T(s)\| \geqslant 1,$$

obţinem estimarea dorită.

Există exemple de semigrupuri tare continui de operatori pentru care avem efectiv $\omega_0 = -\infty$ (exerciţiul 3.9.13).

3.6.5. DEFINIŢIE. Fie $\{T(s)\}_{s \geqslant 0} \subset \mathscr{L}(X)$ un semigrup tare continuu. Pentru $\tau > 0$ să considerăm operatorul

$$B_\tau x = \tau^{-1}(T(\tau)x - x), \quad x \in X.$$

Vom defini un operator liniar B pe subspaţiul liniar

$$D(B) = \{x \in X : \lim_{\tau \to 0} B_\tau x \text{ există în } X\},$$

prin formula

$$Bx = \lim_{\tau \to 0} B_\tau x, \; x \in D(B).$$

Operatorul B astfel definit se va numi *generatorul infinitezimal* al semigrupului $\{T(s)\}_{s \geqslant 0}$.

3.6.6. OBSERVAŢIE. Înainte de a studia unele consecinţe ale definiţiei 3.6.5, să remarcăm că dacă $f : [a, b] \to X$ este o funcţie continuă atunci are loc formula

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \int_a^{a+\tau} f(t)\mathrm{d}t = f(a).$$

Într-adevăr,

$$\left\| \frac{1}{\tau} \int_a^{a+\tau} f(t)\mathrm{d}t - f(a) \right\| = \left\| \frac{1}{\tau} \int_a^{a+\tau} [f(t) - f(a)]\mathrm{d}t \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{a \leqslant t \leqslant a+\tau} \|f(t) - f(a)\|$$

şi ultima expresie tinde la zero cînd $\tau \to 0$, în virtutea continuităţii funcţiei f.

3.6.7. LEMĂ. *Cu notaţia din definiţia* 3.6.5, *dacă* $x \in D(B)$, *atunci* $T(s)x \in D(B)$ *şi* $BT(s)x = T(s)Bx$, *oricare ar fi* $s \geqslant 0$.

Demonstrație. Fie s și x ca în enunț și fie $\tau > 0$. Atunci

$$T(s)\,B_\tau x = T(s)\,\tau^{-1}(T(\tau)\,x - x) = \tau^{-1}(T(\tau)\,T(s)x - T(s)x) =$$

$$= B_\tau T(s)x,$$

prin urmare

$$\lim_{\tau\to 0} T(s)\,B_\tau x = T(s)Bx = \lim_{\tau\to 0} B_\tau T(s)x.$$

De aici conchidem că $T(s)x \in D(B)$ și că $BT(s)x = T(s)Bx$.

3.6.8. LEMĂ. *Cu notația din definiția* 3.6.5, *subspațiul* $D(B)$ *este dens în* X *iar generatorul infinitezimal* B *este închis.*

Demonstrație. Fie $x \in X$, $s > 0$ și $\tau > 0$. Atunci

$$B_\tau \int_0^s T(u)\,x\,du = \frac{1}{\tau}\int_0^s T(u+\tau)\,x\,du - \frac{1}{\tau}\int_0^s T(u)\,x\,du =$$

$$= \frac{1}{\tau}\int_0^{s+\tau} T(u)\,x\,du - \frac{1}{\tau}\int_0^s T(u)\,x\,du = \frac{1}{\tau}\int_s^{s+\tau} T(u)\,x\,du - \frac{1}{\tau}\int_0^\tau T(u)\,x\,du$$

Utilizînd observația 3.6.6, din calculul de mai sus deducem

$$\lim_{\tau\to 0} B_\tau \int_0^s T(u)\,x\,du = T(s)\,x - T(0)\,x = T(s)x - x.$$

Așadar, $s^{-1}\int_0^s T(u)x\,du \in D(B)$ și

$$s^{-1}\,B\int_0^s T(u)\,x\,du = s^{-1}(T(s)x - x) = B_s x, \quad x \in X. \tag{3.6.1}$$

Tot din observația 3.6.6 deducem

$$\lim_{s\to 0} s^{-1}\int_0^s T(u)x\,du = T(0)x = x,$$

de unde rezultă că $D(B)$ este un subspațiu dens în X.

Să menționăm și formula

$$s^{-1}\int_0^s T(u)\,Bx\,\mathrm{d}u = s^{-1}(T(s)\,x - x) = B_s x,\ x \in D(B), \qquad (3.6.2)$$

care se obține printr-un argument similar cu cel utilizat la demonstrarea formulei (3.6.1), pe care-l lăsăm ca exercițiu.

Vom arăta că operatorul B este închis. Fie deci $\{x_k\}_k \subset D(B)$ un șir cu proprietatea că $x_k \to x$ și $Bx_k \to y$ cînd $k \to \infty$. În baza formulei (3.6.2) deducem atunci că

$$B_s x = \lim_{k\to\infty} B_s x_k = \lim_{k\to\infty} s^{-1}\int_0^s T(u)\,Bx_k\,\mathrm{d}u = s^{-1}\int_0^s T(u)\,y\,\mathrm{d}u,$$

căci $T(u)\,Bx_k \to T(u)y$ uniform pe $[0, s]$, de unde

$$y = \lim_{s\to 0} s^{-1}\int_0^s T(u)\,y\,du = \lim_{s\to 0} B_s x,$$

prin urmare, $x \in D(B)$ și $Bx = y$.

3.6.9. PROPOZIȚIE. *Fie* $\{T(s)\}_{s\geqslant 0} \subset \mathcal{L}(X)$ *un semigrup tare continuu, fie* B *generatorul său infinitezimal, fie*

$$\omega_0 = \lim_{s\to\infty} s^{-1} \ln \|T(s)\|$$

și fie $\lambda \in \mathbf{C}$ *cu* $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega_0$. *Atunci* $\lambda \notin \sigma(B, X)$ *și*

$$(\lambda - B)^{-1} x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda s} T(s)x\,\mathrm{d}s,\ x \in X.$$

Demonstrație. Fie $\rho > \omega_0$ astfel încît $\mathrm{Re}\lambda > \rho$. În virtutea lemei 3.6.4, există $M_\rho \geqslant 1$ astfel încît $\|T(s)\| \leqslant M_\rho \mathrm{e}^{\rho s} (s \geqslant 0)$. Acest lucru implică existența integralei

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda s} T(s)\,x\,\mathrm{d}s,\ x \in X,\ \mathrm{Re}\lambda > \omega_0, \qquad (3.6.3)$$

care definește un operator mărginit. Într-adevăr, măsura $d\mu(s) = e^{(\rho-\lambda)s}ds$ este mărginită pe $[0, \infty]$, deoarece

$$\int_0^\infty |e^{(\rho-\lambda)s}|\, ds = \int_0^\infty e^{(\rho-\mathrm{Re}\lambda)s}\, ds = \frac{1}{\mathrm{Re}\lambda - \rho}.$$

În plus, funcția $e^{-\rho s}T(s)x$ este continuă și mărginită. Așadar integrala

$$\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)\, x\, ds = \int_0^\infty e^{-\rho s}T(s)\, x\, e^{(\rho-\lambda)s}\, ds$$

există în X și avem estimarea

$$\left\| \int_0^\infty e^{-\lambda s}\, T(s)\, x\, ds \right\| \leqslant \frac{M_\rho}{\mathrm{Re}\lambda - \rho} \|x\|,$$

ceea ce arată, în particular, că această integrală este un operator liniar și continuu. Să notăm cu $R(\lambda)$ operatorul definit de integrala (3.6.3.) Cu B_τ ca în definiția 3.6.5, avem

$$B_\tau R(\lambda)\, x = \frac{1}{\tau}\int_0^\infty e^{-\lambda s}\, T(s+\tau)\, x\, ds - \frac{1}{\tau}\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)\, x\, ds =$$

$$= \frac{1}{\tau}\int_0^\infty e^{-\lambda(s-\tau)}\, T(s)\, x\, ds - \frac{1}{\tau}\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)\, x\, ds =$$

$$= \frac{e^{\lambda\tau}-1}{\tau}\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)\, x\, ds - \frac{e^{\lambda\tau}}{\tau}\int_0^\tau e^{-\lambda s}\, T(s)\, x\, ds$$

și deci

$$\lim_{\tau\to 0} B_\tau R(\lambda)x = R(\lambda)\, x - x,$$

în baza observației 3.6.6. Aceasta ne arată că $R(\lambda)x \in D(B)$ și că

$$(\lambda - B)\, R(\lambda)\, x = x, \quad x \in X.$$

Fie acum $x \in D(B)$. Atunci $T(s)x \in D(B)$, oricare ar fi $s \geqslant 0$ și $BT(s)x = T(s)Bx$, în conformitate cu lema 3.6.7. Utilizînd teorema 1.1.16, vom scrie

$$\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)\, Bx\, ds = \int_0^\infty B(e^{-\lambda s}\, T(s)\, x)\, ds = B\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)x\, ds,$$

adică $R(\lambda)Bx = BR(\lambda)x$. Aşadar

$$R(\lambda)(\lambda - B)x = (\lambda - B)\ R(\lambda)x = x,\ x \in D(B),$$

ceea ce arată că $R(\lambda) = (\lambda - B)^{-1}$.

3.6.10. OBSERVAŢIE. Fie $\{T(s)\}_{s\geqslant 0} \subset \mathscr{L}(X)$ un semigrup tare continuu şi fie B generatorul său infinitezimal. Să presupunem că $\|T(s)\| \leqslant 1$ pentru orice $s \geqslant 0$. Atunci $(\lambda - B)^{-1} \in \mathscr{L}(X)$ pentru orice $\lambda \in \mathbf{C}$ cu $\mathrm{Re}\lambda > 0$ şi $\|(\lambda - B)^{-1}\| \leqslant (\mathrm{Re}\lambda)^{-1}$. Într-adevăr, în acest caz $\omega_0 \leqslant 0$, deci prima parte a afirmaţiei rezultă din propoziţia precedentă. Apoi, deoarece în demonstraţia propoziţiei putem lua în acest caz $M_\rho = 1$, integrala (3.6.3) va fi majorată de o expresie de forma $(\mathrm{Re}\,\lambda - \rho)^{-1}\|x\|$. Făcînd $\rho \to 0$, obţinem estimarea dorită.

3.6.11. LEMĂ. *Fie* $\{T(s)\}_{s\geqslant 0} \subset \mathscr{L}(X)$ *un semigrup tare continuu, fie* B *generatorul său infinitezimal, fie* $\delta_0 > 0$ *şi fie* $\{C_\delta\}_{0<\delta\leqslant\delta_0} \subset \mathscr{L}(X)$ *o familie cu următoarele proprietăţi* :

(1) C *comută cu* $T(s)$ *pentru orice* δ *şi* s ;

(2) $\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant s} \|e^{tC_\delta}\| = N(s)$,

unde $N(s)$ *este o constantă ce nu depinde de* δ ;

(3) $\lim\limits_{\delta\to 0} C_\delta x = Bx,\ x \in D(B)$.

Atunci

$$T(s)x = \lim_{\delta\to 0} e^{sC_\delta}\, x, \quad x \in X.$$

În plus, convergenţa este uniformă pentru s *aparţinînd unui interval compact arbitrar din* $[0, \infty)$.

Demonstraţie. În baza condiţiei (1), pentru orice număr întreg $n \geqslant 1$ putem scrie

$$T(s) - e^{sC_\delta} = (T(s/n))^n - (e^{(s/n)C_\delta})^n =$$

$$= (T(s/n) - e^{(s/n)C_\delta}) \sum_{k=0}^{n-1} T(ks/n)\, e^{((n-k-1)\,s/n)\,C_\delta}.$$

Fie $M(s) = \sup\{\|T(t)\| : 0 \leqslant t \leqslant s\} < \infty$ (a se vedea lema 3.6.4). Utilizînd condiţia (2) şi observaţia 3.6.10, avem estimările

$$\|(T(s) - e^{sC_\delta})\,x\| \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} M(s)N(s)\|(T(s/n) - e^{(s/n)\,C_\delta})x\| \leqslant$$

$$\leqslant K(s)(n/s)\|(T(s/n) - e^{(s/n)\,C_\delta})x\|,$$

unde $K(s) = sM(s)N(s)$. Membrul stîng fiind independent de n, deducem de aici

$$\|(T(s) - e^{sC_\delta})x\| \leqslant K(s)\overline{\lim_{\tau\to 0}}\,\tau^{-1}\|(T(\tau) - e^{\tau C_\delta})x\|.$$

Dacă B_τ are semnificația din definiția 3.6.5, să observăm că

$$\tau^{-1}\|(T(\tau) - e^{\tau C_\delta})x\| = \|B_\tau x - \tau^{-1}(e^{\tau C_\delta} - 1)x\| \leqslant$$

$$\leqslant \|(B_\tau - C_\delta)x\| + \|(\tau^{-1}(e^{\tau C} - 1) - C_\delta)x\|.$$

În baza estimării

$$\|\tau^{-1}(e^{\tau C_\delta} - 1) - C_\delta\| = \left\| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\tau^{k-1} C_\delta^k}{k!} \right\| \leqslant \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\tau^{k-1}}{k!} \|C_\delta\|^k =$$

$$= \tau^{-1}(e^{\tau\|C_\delta\|} - 1) - \|C_\delta\|,$$

și deci a faptului că

$$\lim_{\tau\to 0} \|\tau^{-1}(e^{\tau C_\delta} - 1) - C_\delta\| = 0,$$

deducem

$$\|(T(s) - e^{\tau C_\delta})x\| \leqslant K(s)\overline{\lim_{\tau\to 0}}\|(B_\tau - C_\delta)x\|.$$

Presupunînd acum că $x \in D(B)$, obținem

$$\lim_{\tau\to 0} \|(B_\tau - C_\delta)x\| = \|Bx - C_\delta x\|.$$

prin urmare

$$\lim_{\delta\to 0} \|(T(s) - e^{sC_\delta})x\| = 0, \tag{3.6.4}$$

în baza condiției (3). Evident, convergența este uniformă dacă s se află într-un interval compact din $[0, \infty)$. Relația (3.6.4) are însă loc pentru orice $x \in X$, deoarece $D(B)$ este dens în X (lema 3.6.8) și mulțimile $\{\|T(s)\|\}$ și $\{\|e^{sC_\delta}\|\}$ sînt mărginite cînd s variază într-un interval compact. Demonstrația este completă.

3.6.12. OBSERVAȚIE. Fie $B_1, B_2 \in \mathscr{L}(X)$ astfel încît $B_1B_2 = B_2B_1$. Să definim (ca în exemplul 3.6.2) semigrupurile tare continue $T_j(s) = e^{sB_j}$ $(s \geqslant 0,\ j = 1, 2)$. Este ușor de văzut că generatorul infinitezimal al semigrupului $\{T_j(s)\}_{s\geqslant 0}$ este chiar B_j (exercițiul 3.9.11). Folosind ideea din demonstrația propoziției precedente (și faptul că generatorii infinitezimali sînt operatori continui), putem deduce existența unei constante $K(s_0) \geqslant 0$

cu proprietatea că

$$\|(e^{sB_1} - e^{sB_2})\, x\| \leqslant K(s_0)\|(B_1 - B_2)x\|,\ s \leqslant s_0,\ x \in X. \qquad (3.6.5)$$

Detaliile le lăsăm pe seama cititorului.

3.6.13. PROPOZIȚIE. *Fie* $\{T(s)\}_{s\geqslant 0} \subset \mathscr{L}(X)$ *un semigrup tare continuu și fie* B *generatorul său infinitezimal. Pentru fiecare* $x \in X$ *avem egalitatea*

$$T(s)x = \lim_{\delta \to 0} e^{sB_\delta}x,$$

unde $B_\delta = \delta^{-1}(T(\delta) - 1)$. *În plus, convergența este uniformă pentru* s *aparținînd unui interval compact arbitrar din* $[0, \infty)$.

Demonstrație. Vom arăta că familia $\{B_\delta\}_{0<\delta\leqslant 1}$ satisface condițiile lemei 3.6.11. Condițiile (1) și (3) sînt evident satisfăcute. Să arătăm că și condiția (2) este îndeplinită. Fie $M = \sup\{\|T(s)\| : 0 \leqslant s \leqslant 1\}$. Atunci, pentru $s \geqslant 0$ arbitrar,

$$\|T(s)\| = \|T([s])\ T(s - [s])\| = \|T(1)^{[s]}T(s - [s])\| \leqslant M^{[s]+1} \leqslant M^{s+1},$$

unde $[s]$ este partea întreagă a lui s. Apoi, deoarece $\|T(\delta)^k\| = \|T(k\delta)\| \leqslant M^{k\delta+1}$,

$$\|e^{sB_\delta}\| = \|e^{-s/\delta}\, e^{(s/\delta)T(\delta)}\| \leqslant$$

$$\leqslant e^{-s/\delta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{s}{\delta}\right)^k M^{k\delta+1} = Me^{(s/\delta)(M^\delta - 1)} \leqslant Me^{s(M-1)},$$

unde am folosit faptul că $\delta^{-1}(M^\delta - 1) \leqslant M - 1$ (cum rezultă ușor prin dezvoltarea în serie a lui $M^\delta = e^{\delta \ln M}$), întrucît $\delta \leqslant 1$. Afirmația se obține acum din lema 3.6.11.

3.6.14. LEMĂ *Fie* $B \in \mathscr{C}(X)$ *un operator dens definit astfel încît* $(1 - \delta B)^{-1} \in \mathscr{L}(X)$ *și* $\|(1 - \delta B)^{-1}\| \leqslant 1$ *pentru orice* $\delta > 0$. *Fie* $C_\delta = B(1 - \delta B)^{-1}$. *Atunci au loc relațiile* :

$$\|e^{sC_\delta}\| \leqslant 1,\ s \geqslant 0\,; \qquad (3.6.6)$$

$$\lim_{\delta \to 0} C_\delta x = Bx,\ x \in D(B). \qquad (3.6.7)$$

Demonstrație. Să remarcăm că

$$C_\delta = B(1 - \delta B)^{-1} = \delta^{-1}((1 - \delta B)^{-1} - 1) \in \mathscr{L}(X),$$

prin urmare

$$\|e^{sC_\delta}\| = \|e^{(s/\delta)((1-\delta B)^{-1}-1)}\| = e^{-s/\delta}\,\|e^{(s/\delta)(1-\delta B)^{-1}}\| \leqslant$$

$$\leqslant e^{-s/\delta}\, e^{(s/\delta)\|(1-\delta B)^{-1}\|} \leqslant e^{-s/\delta}\, e^{s/\delta} = 1,$$

în care am utilizat ipoteza și faptul că $\|e^T\| \leqslant e^{\|T\|}$ pentru orice $T \in \mathscr{L}(X)$, ceea ce este clar prin dezvoltare în serie.

Pentru a obține (3.6.7), vom demonstra în prealabil că

$$\lim_{\delta \to 0}(1 - \delta B)^{-1} y = y, \quad y \in X. \tag{3.6.8}$$

Într-adevăr, dacă $y \in D(B)$, atunci egalitatea evidentă

$$(1 - \delta B)^{-1} y - y = \delta(1 - \delta B)^{-1} By$$

implică relația (3.6.8) pentru asemenea vectori, deoarece $\|(1 - \delta B)^{-1}\| \leqslant \leqslant 1$; relația (3.6.8) are loc pentru vectorii arbitrari, în baza densității spațiului $D(B)$. Din egalitatea (3.6.8) obținem

$$\lim_{\delta \to 0} C_\delta x = \lim_{\delta \to 0}(1 - \delta B)^{-1} Bx = Bx, \quad x \in D(B),$$

adică tocmai relația (3.6.7).

3.6.15. TEOREMĂ. *Fie* $\{T(s)\}_{s \geqslant 0} \subset \mathscr{L}(X)$ *un semigrup tare continuu cu proprietatea că*

$$\|T(s)\| \leqslant 1, \; s \geqslant 0, \tag{3.6.9}$$

și fie B *generatorul său infinitezimal. Atunci*

$$(1 - \delta B)^{-1} \in \mathscr{L}(X) \text{ și } \|(1 - \delta B)^{-1}\| \leqslant 1, \; \delta > 0. \tag{3.6.10}$$

În plus, dacă $C_\delta = B(1 - \delta B)^{-1}$, *pentru fiecare* $x \in X$ *are loc egalitatea*

$$T(s)x = \lim_{\delta \to 0} e^{sC_\delta} x, \tag{3.6.11}$$

convergența fiind uniformă pentru s *aparținînd unui interval compact arbitrar din mulțimea* $[0, \infty)$.

Reciproc, dacă $B \in \mathscr{C}(X)$ *este un operator dens definit care satisface condiția* (3.6.10), *atunci există un semigrup tare continuu* $\{T(s)\}_{s \geqslant 0} \subset \mathscr{L}(X)$ *cu proprietatea* (3.6.9), *al cărui generator infinitezimal este chiar* B.

Demonstrație. Vom începe cu prima parte a teoremei. Din cauza condiției (3.6.9) și în virtutea observației 3.6.10, obținem faptul că $(1 - \delta B)^{-1} \in \mathscr{L}(X)$ și

$$\|(1 - \delta B)^{-1}\| = \delta^{-1}\|(\delta^{-1} - B)^{-1}\| \leqslant 1, \; \delta > 0,$$

deci că generatorul infinitezimal B are proprietatea exprimată de relaţia (3.6.10).

Pentru a demonstra (3.6.11) va fi suficient să arătăm că familia $\{C_\delta\}_{\delta>0}$ satisface condiţiile lemei 3.6.11. Întrucît $C_\delta = \delta^{-1}((1-\delta B)^{-1} - 1)$, rezultă că C_δ comută cu $T(s)$ [folosind de exemplu, reprezentarea integrală a lui $(1-\delta B)^{-1}$ indusă de formula (3.6.3)], deci condiţia (1) din lema 3.6.11 este îndeplinită. Deoarece generatorul infinitezimal satisface ipotezele lemei 3.6.14, concluzia acestei leme, mai precis relaţiile (3.6.6) şi (3.6.7), nu înseamnă altceva decît indeplinirea condiţiilor (2) şi (3) cerute de lema 3.6.11. Lema 3.6.11 ne asigură atunci realizarea convergenţei exprimate prin (3.6.11). Aceasta încheie prima parte a demonstraţiei.

Ne vom ocupa acum de partea a doua a teoremei. Fie deci $B \in \mathscr{C}(X)$ un operator dens definit care satisface (3.6.10). Vom defini operatorul $C_\delta = B(1-\delta B)^{-1}$; sînt, din nou, îndeplinite condiţiile lemei 3.6.14, deci vom putea folosi relaţiile (3.6.6) şi (3.6.7).

Pentru fiecare $\delta > 0$ vom defini un semigrup de operatori $\{T_\delta(s)\}_{\delta\geqslant 0}$, punînd $T_\delta(s) = e^{sC_\delta}$. Făcînd apel la observaţia 3.6.12, vom obţine o estimare de forma

$$\|(T_\delta(s) - T_\varepsilon(s))x\| \leqslant K(t)\|(C_\delta - C_\varepsilon)x\|, \quad s \leqslant t, \tag{3.6.12}$$

pentru toţi $\delta, \varepsilon > 0$ şi $x \in X$. [Utilizînd (3.6.6), se poate arăta că avem chiar $K(t) \leqslant t$, dar nu vom folosi acest fapt.] Relaţia (3.6.12) iplică existenţa limitei

$$T(s)x = \lim_{\delta\to 0} T_\delta(s)\, x, \; s \geqslant 0, \; x \in X. \tag{2.6.13}$$

Într-adevăr, dacă $x \in D(B)$, existenţa acestei limite rezultă din (3.6.12) şi (3.6.7). Deoarece $\|T_\delta(s)\| \leqslant 1$ [din (3.6.6)], existenţa limitei (3.6.11) se obţine pentru orice vector $x \in X$, pe baza densităţii spaţiului $D(B)$. Mai mult decît atît, avem $T(s) \in \mathscr{L}(X)$ şi $\|T(s)\| \leqslant 1$ pentru fiecare $s \geqslant 0$, în virtutea teoremei 0.3.5 (a se vedea şi exerciţiul 3.9.4).

Vom arăta că $\{T(s)\}_{s\geqslant 0}$ este un semigrup tare continuu, al cărui generator infinitezimal este B. Îndeplinirea cerinţelor de a fi semigrup se obţine tot din (3.6.13). Evident, $T(0) = 1$. Apoi, dacă $s_1, s_2 \geqslant 0$ şi $x \in X$, avem

$$\|T(s_1+s_2)x - T(s_1)\,T(s_2)x\| \leqslant \|T(s_1+s_2)x - T_\delta(s_1+s_2)\,x\| +$$

$$+ \|T_\delta(s_1)\|\,\|T_\delta(s_2)\,x - T(s_2)\,x\| + \|T_\delta(s_1)\,T(s_2)\,x - T(s_1)T(s_2)x\|,$$

şi membrul drept tinde la zero cînd $\delta \to 0$, ceea ce asigură îndeplinirea condiţiei (1) din definiţia 3.6.1. Să observăm apoi că pentru $x \in D(B)$, din (3.6.12) obţinem că limita (3.6.13) este uniformă pentru s aflat într-un interval compact arbitrar. Acest fapt atrage după sine continuitatea aplicaţiei $s \to T(s)x$. Dacă $x \in X$ este arbitrar, în baza densităţii spaţiului $D(B)$ în X şi prin utilizarea estimării (3.6.6) se obţine continuitatea aplicaţiei $s \to T(s)x$ şi în acest caz. În consecinţă $\{T(s)\}_{s\geqslant 0}$ este un semigrup tare continuu de operatori, cu proprietatea (3.6.9).

Din egalitatea (3.6.2) rezultă că

$$s^{-1}(T_\delta(s)x - x) = s^{-1}\int_0^s T_\delta(u)C_\delta x\,du,\quad x \in X,\ s > 0. \tag{3.6.14}$$

Dacă $x \in D(B)$, atunci $T_\delta(u)C_\delta\ x$ converge la $T(u)Bx$ cînd $\delta \to 0$, uniform în $u \in [0, s]$, prin urmare, trecînd la limită în (3.6.14), obţinem

$$s^{-1}(T(s)x - x) = s^{-1}\int_0^s T(u)\,Bx\,du$$

ceeea ce ne conduce la egalitatea

$$\lim_{s\to 0} s^{-1}(T(s)\,x - x) = Bx,$$

în baza observaţiei 3.6.6. Aşadar dacă $\bar{B}$ este generatorul infinitezimal al semigrupului $\{T(s)\}_{s\geqslant 0}$, avem $\bar{B} \supset B$. Reciproc, fie $x \in D(\bar{B})$ şi fie $y = (1 - \delta\bar{B})x$, pentru un $\delta > 0$ fixat. Din (3.6.10) rezultă că putem găsi un $x_0 \in D(B)$ astfel încît $y = (1 - \delta B)x_0$. Prin urmare, $(1 - \delta\bar{B})(x - x_0) = 0$, deci $x = x_0 \in D(B)$ datorită inversabilităţii operatorului $1 - \delta\bar{B}$ (dată de prima parte a demonstraţiei). Vom putea conchide că $\bar{B} = B$, ceea ce încheie demonstraţia teoremei.

Acest rezultat de caracterizare a generatorului infinitezimal al unui semigrup tare continuu de operatori cu proprietatea (3.6.9) este datorat lui Hille şi Yosida. Restricţia impusă de condiţia (3.6.9) nu este esenţială. Pentru o versiune mai generală a acestei teoreme se poate consulta [8], cap. VIII, §1.

3.7. SEMIGRUPURI UNITARE

În acest paragraf ne vom plasa din nou în cadrul unui spaţiu Hilbert H.

3.7.1. DEFINIŢIE. Un semigrup tare continuu $\{U(s)\}_{s\geqslant 0} \subset \mathscr{L}(H)$ se numeşte *unitar* dacă $U(s)$ este operator unitar pentru fiecare număr $s \geqslant 0$.

Înainte de a trece la studiul unor proprietăţi ale semigurpurilor unitare, vom demonstra un rezultat de funcţii reale, necesar argumentaţiei noastre.

3.7.2. LEMĂ. *Fie* $f : [0, \infty) \to \mathbf{C}$ *o funcţie integrabilă în raport cu măsura Lebesgue. Dacă*

$$\int_0^\infty e^{-nt} f(t)\,dt = 0,\quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

atunci $f(t) = 0$ *aproape peste tot.*

Demonstrație. Vom face schimbarea de variabilă $u = e^{-t}$. Atunci $t = -\ln u$ și

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^\infty u^s g(u)\, du,$$

unde $g(u) = u^{-1} f(-\ln u) (u \neq 0)$. Funcția g (extinsă oricum în 0) este integrabilă pe segmentul $[0, 1]$. În plus, din egalitatea de mai înainte se obține

$$\int_0^1 h(u)\, g(u)\, du = 0 \tag{3.7.1}$$

pentru orice polinom h (restricționat la intervalul $[0, 1]$). Utilizînd teorema lui Weierstrass de aproximare a funcțiilor continue cu polinoame (teorema 0.5.9), deducem că (3.7.1) are loc pentru orice funcție h continuă pe $[0, 1]$. Teorema 0.4.19 ne spune atunci că măsura $d\mu(u) = g(u)du$ este nulă; prin urmare, funcția g trebuie să fie nulă aproape peste tot. Atunci funcția inițială f trebuie să fie nulă aproape peste tot, ceea ce încheie demonstrația.

Vom trece acum la studiul semigrupurilor unitare.

3.7.3. LEMĂ. *Fie* $\{U(s)\}_{s>0} \subset \mathcal{L}(H)$ *un semigrup unitar și fie* B *generatorul său infinitezimal. Atunci* $\{U(s)\}_{s>0}$ *este un semigrup unitar al cărui generator infinitezimal este* $-B$.

Demonstrație. Vom nota, pentru simplitate, $V(s) = U(s)^*$ $(s \geqslant 0)$. Este limpede că $V(0) = 1$. Apoi, dacă $s_1, s_2 \geqslant 0$,

$$V(s_1 + s_2) = U(s_1 + s_2)^* = U(s_1)^* U(s_2)^* = V(s_1) V(s_2).$$

Vom verifica acum condiția (3) din definiția 3.6.1. Să fixăm $s_0 \geqslant 0$. Dacă $s \geqslant s_0$, atunci

$$\|V(s)x - V(s_0)x\| = \| V(s_0)(V(s - s_0)x - x)\| = \|(V(s - s_0)x - x\|$$

$$= \| V(s - s_0)(x - U(s - s_0)x)\| = \|x - U(s - s_0)x\|$$

Asemănător, dacă $s \leqslant s_0$, atunci

$$\|V(s)x - V(s_0)x\| = \|x - U(s_0 - s)x\|,$$

prin urmare, pentru s și s_0 arbitrari,

$$\|V(s)x - V(s_0)x\| = \|x - U(|s - s_0|)x\|,$$

de unde rezultă continuitatea aplicației $s \to V(s)x$ în fiecare punct $s_0 \geqslant 0$ și pentru fiecare vector $x \in H$.

Să remarcăm că dacă $x \in D(B)$, atunci

$$\lim_{\tau \to 0} \tau^{-1}(V(\tau)x - x) = \lim_{\tau \to 0} \tau^{-1} V(\tau)(x - U(\tau)x) = -Bx.$$

Aşadar, dacă B_1 este generatorul infinitezimal al semigrupului $\{V(s)\}_{s \geqslant 0}$, atunci $B_1 \supset -B$. Deoarece şi $U(s) = V(s)^*$, acelaşi raţionament ne arată că $B \supset -B_1$, prin urmare $B_1 = -B$.

Orice operator autoadjunct poate fi asociat cu un semigrup unitar, după cum rezultă din afirmaţia care urmează.

3.7.4. LEMĂ. *Fie $A \in \mathscr{C}(H)$ un operator autoadjunct şi fie E măsura sa spectrală. Atunci formula*

$$U(s) = \int_{\mathbf{R}} e^{ist}\, dE(t), \quad s \geqslant 0,$$

defineşte un semigrup unitar al cărui generator infinitezimal este iA.

Demonstraţie. Este limpede că $U(s_1 + s_2) = U(s_1)U(s_2)$ pentru orice $s_1, s_2 \geqslant 0$ şi că $U(0) = 1$. Vom fixa apoi un $s_0 \geqslant 0$. Atunci

$$\|U(s)x - U(s_0)x\|^2 = \int_{\mathbf{R}} |e^{ist} - e^{is_0 t}|^2\, d\langle E(t)x, x\rangle,$$

în baza propoziţiei 2.2.12. Dacă $s_k \to s_0$ cînd $k \to \infty$, atunci

$$\lim_{k \to \infty} |e^{is_k t} - e^{is_0 t}| = 0$$

pentru fiecare $t \in \mathbf{R}$. Funcţiile fiind continue şi mărginite, teorema 0.4.17 ne asigură că integralele corespunzătoare tind la zero, ceea ce probează continuitatea aplicaţiei $s \to U(s)x$ în s_0. Aşadar, $\{U(s)\}_{s \geqslant 0}$ este un semigrup tare continuu. Să mai remarcăm că

$$U(s)^* = \int_{\mathbf{R}} e^{-ist}\, dE(t) = U(s)^{-1}, \quad s \geqslant 0;$$

prin urmare, operatorii $U(s)$ sînt unitari.

Fie acum

$$B_\tau = \tau^{-1}(U(\tau) - 1) = \int_{\mathbf{R}} \tau^{-1}(e^{i\tau t} - 1)\, dE(t)$$

Luînd un şir de numere pozitive $\tau_k \to 0$ (cînd $k \to \infty$), avem

$$\lim_{k \to \infty} \tau_k^{-1}(e^{i\tau_k t} - 1) = it \text{ şi } \tau_k^{-1}|e^{i\tau_k t} - 1| \leqslant |t|$$

pentru fiecare $t \in \mathbf{R}$ fixat. De aici rezultă că şirul $\{B_{\tau_k} x\}_k$ are limită atunci şi numai atunci cînd $x \in D(\mathrm{i}A) = D(A)$ şi că generatorul infinitezimal al lui $\{U(s)\}_{s>0}$ trebuie să fie $\mathrm{i}A$ (a se vedea şi exerciţiul 3.9.6).

Rezultatul care urmează, datorat lui Stone, arată că orice semigrup unitar este de forma acelora descrise de lema precedentă.

3.7.5. TEOREMĂ. *Fie* $\{U(s)\}_{s>0} \subset \mathscr{L}(H)$ *un semigrup unitar. Atunci există o măsură spectrală* $E : \mathrm{Bor}(\mathbf{R}) \to \mathscr{A}(H)$ *astfel încît*

$$U(s) = \int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}st}\, \mathrm{d}E(t), \quad s \geqslant 0.$$

Demonstraţie. Fie B generatorul infinitezimal al semigrupului $\{U(s)\}_{s>0}$. În baza propoziţiei 3.6.9,

$$(\lambda - B)^{-1} x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda s}\, U(s)\, x\, \mathrm{d}s, \quad x \in H, \ \mathrm{Re}\lambda > 0, \tag{3.7.2}$$

deoarece

$$\omega_0 = \lim_{s\to\infty} s^{-1} \ln \|U(s)\| = 0.$$

Aplicînd propoziţia 3.6.9 şi semigrupului unitar $\{U(s)^*\}_{s>0}$ (lema 3.7.3), obţinem relaţia

$$(\lambda + B)^{-1} x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda s}\, U(s)^*\, x\, \mathrm{d}s, \quad x \in H, \ \mathrm{Re}\lambda > 0. \tag{3.7.3}$$

Vom defini operatorul $A = -\mathrm{i}B$. Notînd $\mu = -\mathrm{i}\lambda$, deducem

$$(\mu - A)^{-1} = (-\mathrm{i})^{-1}(\lambda - B)^{-1} = \mathrm{i}(\lambda - B)^{-1},$$

prin urmare, utilizînd (3.7.2), putem scrie

$$(\mu - A)^{-1} x = \mathrm{i}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu s}\, U(s)\, x\, \mathrm{d}s, \quad x \in H, \ \mathrm{Im}\mu < 0. \tag{3.7.4}$$

Asemănător, dacă $\mu = \mathrm{i}\lambda$, atunci $(\mu - A)^{-1} = -\mathrm{i}(\lambda + B)^{-1}$ iar din (3.7.3) căpătăm relaţia

$$(\mu - A)^{-1} x = -\mathrm{i}\int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu s}\, U(s)^*\, x\, \mathrm{d}s, \quad x \in H, \ \mathrm{Im}\mu > 0. \tag{3.7.5}$$

Vom fixa acum vectorii $x, y \in H$ precum şi un număr $\mu \in \mathbf{C}$ cu $\operatorname{Im} \mu > 0$. Egalităţile (3.7.5) şi (3.7.4) ne permit atunci să scriem

$$\langle (\mu - A)^{-1} x, y \rangle = -i \int_0^\infty e^{i\mu s} \langle U(s)^* x, y \rangle \, ds =$$

$$= -i \int_0^\infty e^{i\mu s} \langle x, U(s) y \rangle ds = \langle x, i \int_0^\infty e^{-i\bar{\mu} s} U(s) y \, ds \rangle =$$

$$= \langle x, (\bar{\mu} - A)^{-1} y \rangle,$$

în care am utilizat o variantă (valabilă în spaţii Hilbert) a corolarului 1.1.7. Acest calcul arată că

$$((\mu - A)^{-1})^* = (\bar{\mu} - A^*)^{-1} = (\bar{\mu} - A)^{-1},$$

pe baza lemei 3.1.8. Ultima egalitate ne spune că $A^* = A$, deci operatorul A este autoadjunct.

Fie E măsura spectrală a operatorului A. Vom defini, ca în lema 3.7.4, operatorii (unitari)

$$W(s) = \int_{\mathbf{R}} e^{ist} \, dE(t), \quad s \geqslant 0.$$

Ne propunem să arătăm că $W(s) = U(s)$ pentru orice $s \geqslant 0$. Fie $\nu > 0$ un număr fixat. În virtutea teoremei lui Fubini (exerciţiul 0.6.24), avem următoarele egalităţi :

$$\int_0^\infty e^{-\nu s} \langle W(s) x, y \rangle \, ds \int_0^\infty \left(\int_{\mathbf{R}} e^{-(\nu - it)s} \, d\langle E(t) x, y \rangle \right) ds =$$

$$= \int_{\mathbf{R}} \left(\int_0^\infty e^{-(\nu - it)s} \, ds \right) d\langle E(t) x, y \rangle = \int_{\mathbf{R}} (\nu - it)^{-1} \, d\langle E(t) x, y \rangle =$$

$$= \langle (\nu - iA)^{-1} x, y \rangle = -i \langle (-i\nu - A)^{-1} x, y \rangle = \int_0^\infty e^{-\nu s} \langle U(s) x, y \rangle \, ds,$$

în care am utilizat corolarul 3.3.4 şi (3.7.4). Putem scrie deci că

$$\int_0^\infty e^{-\nu s} (\langle (W(s) - U(s)) x, y \rangle) \, ds = 0, \quad \nu > 0.$$

În particular, notînd $f(t) = e^{-t}\langle (W(t) - U(t))x, y\rangle$, putem spune că

$$\int_0^\infty e^{-nt} f(t)\, dt = 0,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Lema 3.7.2 ne permite atunci să afirmăm că $f(t) = 0$ aproape peste tot. Funcția f fiind continuă, egalitatea $f(t) = 0$ trebuie să aibă loc pentru orice $t \geqslant 0$ (ca în exercițiul 3.9.3). De aici deducem că $W(t) = U(t)$ pentru orice t, ceea ce încheie demonstrația.

3.7.6. COROLAR. *Fie $A \in \mathscr{C}(H)$ un operator autoadjunct. Atunci avem egalitățile*

$$(\mu - A)^{-1} x = i\int_0^\infty e^{-i\mu s}\, e^{isA}\, x\, ds,\ \mathrm{Im}\,\mu < 0,\quad (\mu - A)^{-1}x = -i\int_0^\infty e^{i\mu s}\, e^{-isA}\, x\, ds,$$

$$\mathrm{Im}\,\mu > 0,$$

oricare ar fi $x \in H$.

Demonstrație. Formulele din enunț nu sînt altceva decît relațiile (3.7.4) și (3.7.5), via lema 3.7.4 (și notația uzuală, introdusă la începutul paragrafului 3.3).

3.8. COMUTAREA OPERATORILOR AUTOADJUNCȚI

Fie A și B doi operatori autoadjuncți, nu neapărat mărginiți, acționînd în spațiul Hilbert H. În acest paragraf vom încerca să răspundem următoarei întrebări : în ce sens se poate vorbi despre comutarea operatorilor A și B?

Vom începe cu o caracterizare a comutării operatorilor normali, în termeni de măsuri spectrale.

3.8.1. LEMĂ. *Fie $N_j \in \mathscr{L}(H)$ operatori normali și fie $E_j : \mathrm{Bor}(\sigma(N_j, H)) \to \mathscr{A}(H)$ măsurile lor spectrale ($j = 1,2$). Următoarele afirmații sînt echivalente :*

(1) *N_1 comută cu N_2 ;*

(2) *$E_1(S')E_2(S'') = E_2(S'')E_1(S')$ pentru orice $S' \in \mathrm{Bor}(\sigma(N_1, H))$ și $S'' \in \mathrm{Bor}(\sigma(N_2, H))$.*

Demonstrație. Fie $\tilde{E}_j$ extinderea trivială a măsurii E_j la $\mathrm{Bor}(\mathbf{C})$ [deci $\tilde{E}_j(S) = E_j(S \cap \sigma(N_j, H))$ pentru orice $S \in \mathrm{Bor}(\mathbf{C})$]. Presupunînd (2) îndeplinită, vom avea că $\tilde{E}_1(S')$ comută cu $\tilde{E}_2(S'')$ pentru orice S', $S'' \in \mathrm{Bor}(\mathbf{C})$. Este limpede că $f_1(N_1)$ comută cu $f_2(N_2)$, oricare ar fi f_1, $f_2 \in B_c(\mathbf{C})$. Folosind densitatea spațiului $B_c(\mathbf{C})$ în $B(\mathbf{C})$ și continuitatea calculului funcțional cu funcții boreliene mărginite (corolarul 2.3.7 și propoziția 2.1.4), este ușor de văzut că $f_1(N_1)$ comută cu $f_2(N_2)$ pentru orice f_1, $f_2 \in B(\mathbf{C})$. În particular, dacă $f_j(t) = t$ pentru $t \in \sigma(N_j, H)$ și $f_j(t) = 0$

dacă $t \notin \sigma(N_j, H)$, atunci $f_j(N_j) = N_j$, deci N_1 comută cu N_2. Aşadar, (2) $\Rightarrow$ (1).

Să presupunem condiţia (1) îndeplinită. Deoarece N_2 comută cu N_1, atunci N_2 comută cu orice funcţie continuă de N_1, în baza teoremei 2.4.1 (a se vedea şi corolarul 2.4.3). Fie $\{\mu^1_{x,y}\}_{x,y \in H}$ măsurile scalare ataşate măsurii spectrale E_1 (observaţia 2.2.11.1^0), prin urmare

$$\langle f(N_1)\, x, y\rangle = \int\limits_{\sigma(N_1, H)} f \, d\mu^1_{x,y}, \quad f \in C(\sigma(N_1, H)),$$

pentru fiecare pereche de vectori $x, y \in H$. Să remarcăm însă că

$$\langle f(N_1) N_2 x, y\rangle = \langle N_2 f(N_1)\, x, y\rangle = \langle f(N_1) x, N_2^* y\rangle,$$

ceea ce implică egalitatea de măsuri $\mu^1_{N_2 x, y} = \mu^1_{x, N_2^* y}$, în baza teoremei 0.4.19. Folosind această egalitate şi fixînd o mulţime $S \in \mathrm{Bor}(\sigma(N_1, H))$, putem scrie

$$\langle E_1(S)\, N_2 x, y\rangle = \int \chi_S \, d\mu^1_{N_2 x, y} = \int \chi_S \, d\mu^1_{x, N_2^* y} = \langle E_1(S)\, x, N_2^* y\rangle =$$

$$= \langle N_2 E_1(S)\, x, y\rangle.$$

Vectorii $x, y \in H$ fiind arbitrari, deducem $E_1(S) N_2 = N_2 E_1(S)$, oricare ar fi mulţimea $S \in \mathrm{Bor}(\sigma(N_1, H))$.

Fixînd o mulţime $S' \in \mathrm{Bor}(\sigma(N_1, H))$, raţionamentul se poate repeta, înlocuind pe N_2 cu $E_1(S')$ şi pe N_1 cu N_2. Această operaţie ne conduce la concluzia că $E_1(S') E_2(S'') = E_2(S'') E_1(S')$, oricare ar fi $S'' \in \mathrm{Bor}(\sigma(N_2, H))$, ceea ce încheie demonstraţia.

3.8.2. OBSERVAŢIE. Dacă $A, B \in \mathscr{L}(H)$ sînt operatori autoadjuncţi şi dacă notăm cu E_A, respectiv E_B măsurile lor spectrale trivial extinse la $\mathrm{Bor}(\mathbf{R})$, putem afirma că $AB = BA$ dacă şi numai dacă $E_A(S') E_B(S'') = E_B(S'') E_A(S')$ pentru orice $S', S'' \in \mathrm{Bor}(\mathbf{R})$. Demonstraţia este practic aceeaşi cu a lemei 3.8.1.

3.8.3. DEFINIŢIE. Fie Ω un spaţiu topologic şi fie $E_j : \mathrm{Bor}(\Omega) \to \mathscr{A}(H)$ măsuri spectrale ($j = 1,2$). Vom spune că E_1 *comută* cu E_2 dacă $E_1(S') E_2(S'') = E_2(S'') E_1(S')$, oricare ar fi $S', S'' \in \mathrm{Bor}(\Omega)$.

Cu această definiţie şi în baza observaţiei 3.8.2, putem afirma că operatorii autoadjuncţi $A, B \in \mathscr{L}(H)$ comută dacă şi numai dacă măsurile lor spectrale E_A şi E_B comută.

În cazul în care cel puţin unul din operatorii A, B este nemărginit, relaţia $AB = BA$ trebuie definită cu anumite precauţii şi, după cum vom vedea, nu pe această cale este recomandabil să se introducă ideea de comutare a operatorilor A şi B. Folosind observaţia 3.8.2, este rezonabil să atacăm problema comutării operatorilor autoadjuncţi nemărginiţi prin utilizarea măsurilor spectrale.

3.8.4. DEFINIȚIE. Fie A, $B \in \mathscr{C}(H)$ operatori autoadjuncți și fie E_A, respectiv E_B măsurile lor spectrale. Vom spune că A *comută* cu B dacă E_A comută cu E_B.

3.8.5. TEOREMĂ. *Fie* A, $B \in \mathscr{C}(H)$ *operatori autoadjuncți. Următoarele afirmații sînt echivalente* :

(1) A *și* B *comută*;

(2) *există* λ, $\mu \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ *astfel încît*

$$(\lambda - A)^{-1}(\mu - B)^{-1} = (\mu - B)^{-1}(\lambda - A)^{-1};$$

(3) $e^{isA}\, e^{itB} = e^{itB}\, e^{isA}$ *oricare ar fi* $s,t \in \mathbf{R}$.

Demonstrație. Este clar că (1) $\Rightarrow$ (2) și că (1) $\Rightarrow$ (3) deoarece expresiile care apar în (2) și (3) sînt funcții continue și mărginite de operatorii A, B; întrucît măsurile spectrale ale acestor operatori comută, și funcțiile boreliene și mărginite de acești operatori comută (ca în prima parte a demonstrației lemei 3.8.1).

Să arătăm apoi că (2) $\Rightarrow$ (1). Într-adevăr, operatorii $(\lambda - A)^{-1}$ și $(\mu - B)^{-1}$ sînt normali (lema 3.2.4), deci comutarea lor atrage după sine comutarea măsurilor lor spectrale, în virtutea lemei 3.8.1. Deoarece măsurile spectrale ale lui A și B se deduc din măsurile spectrale ale lui $(\lambda - A)^{-1}$, respectiv $(\mu - B)^{-1}$ (observația 3.2.8) prin relații de tipul (3.2.3), (3.2.4) și (3.2.5), devine clar că și măsurile spectrale ale lui A și B comută.

În sfîrșit, să demonstrăm că și (3) $\Rightarrow$ (2). Într-adevăr, să presupunem, pentru fixarea ideilor, că alegem punctele λ, $\mu \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ cu $\operatorname{Im}\lambda < 0$ și $\operatorname{Im}\mu < 0$. Atunci

$$(\lambda - A)^{-1}x = i\int_0^\infty e^{-i\lambda s}\, e^{isA}\, x\, ds.$$

$$(\mu - B)^{-1}\, x = i\int_0^\infty e^{-i\mu t}\, e^{itB}\, x\, ds,$$

oricare ar fi $x \in H$, în virtutea corolarului 3.7.6. Relația de comutare de la (2) va fi demonstrată dacă vom arăta că

$$\int_0^\infty e^{-i\lambda s}\, e^{isA} \left(\int_0^\infty e^{-i\mu t}\, e^{itB}\, x\, dt \right) ds =$$

$$= \int_0^\infty e^{-i\mu t}\, e^{itB} \left(\int_0^\infty e^{-i\lambda s}\, e^{isA}\, x\, ds \right) dt, \qquad (3.8.1)$$

ceea ce va rezulta din proprietatea de comutare presupusă şi din varianta vectorială a teoremei lui Fubini (pentru detalii se poate consulta [8], III.11). Să arătăm că această teoremă este aplicabilă Într-adevăr, funcţia $(s, t) \to e^{isA} e^{itB} x$ este continuă pe $[0, \infty) \times [0, \infty)$ deoarece, fixînd un punct (s_0, t_0), avem estimarea

$$\|e^{isA}\, e^{itB}\, x - e^{is_0A}\, e^{it_0B}\, x\| \leqslant \|e^{itB}\, x - e^{it_0B}\, x\| +$$

$$+ \|(e^{isA} - e^{is_0A})\, e^{it_0B}\, x\|;$$

această estimare (împreună cu lema 3.7.4) ne dă continuitatea dorită. Întrucît

$$\|e^{-i\lambda s}\, e^{-i\mu t}\, e^{isA}\, e^{itB}\, x\| \leqslant e^{(\mathrm{Im}\lambda)s}\, e^{(\mathrm{Im}\mu)t}\|x\|$$

iar membrul drept este o funcţie scalară integrabilă, rezultă că integrala

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-i\lambda s}\, e^{-i\mu t}\, e^{isA}\, x^{itB}\, x \mathrm{d}s\, \mathrm{d}t$$

există şi este egală cu oricare din integralele de la (3.8.1). (A se vedea şi exerciţiul 3.9.16.)

Pentru alte alegeri ale punctelor λ şi μ în $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ se procedează asemănător şi se obţine aceeaşi concluzie. Raţionamentul nostru arată că de fapt putem formula condiţia (2) înlocuind cuvîntul „există" cu expresia „oricare ar fi", cu păstrarea echivalenţei. Demonstraţia este încheiată.

3.8.6. OBSERVAŢIE. Există un exemplu remarcabil, datorat lui Nelson, care arată că folosirea relaţiei $AB = BA$ în definirea comutării operatorilor autoadjuncţi nemărginiţi este improprie. Nelson construieşte un spaţiu Hilbert H, un subspaţiu liniar D dens în H şi operatorii liniari $A_0 : D \to D$, $B_0 : D \to D$ care sînt *esenţial autoadjuncţi*, adică A_0 şi B_0 sînt preînchişi şi închiderile lor canonice A, respectiv B sînt operatori autoadjuncţi. În plus, $A_0B_0x = B_0A_0x$, oricare ar fi $x \in D$. Cu toate acestea, operatorii e^{isA} şi e^{itB} nu comută, deci, în baza teoremei 3.8.5, măsurile spectrale ale lui A şi B nu comută. Pentru detalii privind această construcţie a lui Nelson se poate consulta [14], cap. VIII, § 5.

3.9. EXERCIŢII ŞI COMPLETĂRI

3.9.1. Fie H, K spaţii Hilbert, fie $T_1 : D(T_1) \subset H \to K$ un operator liniar, dens definit şi fie $T_2 \supset T_1$. Arătaţi că $T_1^* \supset T_2^*$.

3.9.2. Fie H, K, L spaţii Hilbert, fie $T_1 : D(T_1) \subset H \to K$ un operator liniar, dens definit şi fie $T_2 \in \mathcal{L}(K, L)$. Atunci are loc egalitatea $(T_2\, T_1)^* = T_1^*\, T_2^*$ [completare la lema 3.1.3(3)].

3.9.3. Fie H și A ca în exemplul 3.2.2. Vom începe prin a remarca faptul că două funcți continue pe $\mathbf{R}$, egale aproape peste tot în raport cu măsura Lebesgue, trebuie să fie egale peste tot, deoarece mulțimile de măsură Lebesgue nulă nu pot avea puncte interioare, deci toate punctele lor se pot aproxima cu șiruri de puncte din afara mulțimii. Din acest motiv, putem identifica o clasă de funcții egale aproape peste tot care conține o funcție continuă cu însăși funcția continuă, ceea ce vom face în continuare.

Din modul în care este definit subspațiul $D(A)$ rezultă că acesta conține spațiul funcțiilor continue, cu suport compact în $\mathbf{R}$, pe care-l vom nota cu $C_0(\mathbf{R})$.

1° Arătați că spațiul $C_0(\mathbf{R})$ este dens în $H = L^2(\mathbf{R})$.

Indicație. Dacă $C_0(\mathbf{R})$ nu ar fi dens în H, cu ajutorul teoremei 0.3.11 am deduce existența unui element nenul $h \in H$ astfel încît

$$\int_{\mathbf{R}} f(t)\, h(t)\, dt = 0,\ f \in C_0(R).$$

Fie $[a, b]$ un interval compact în R și fie $\varepsilon > 0$. Pentru orice funcție $f \in C([a, b])$ vom nota cu f_ε funcția egală cu f pe $[a, b]$, egală cu 0 în afara lui $[a - \varepsilon, b + \varepsilon]$ și prelungită liniar în rest. Atunci $f_\varepsilon \in C_0(\mathbf{R})$; prin urmare,

$$\int_{\mathbf{R}} f_\varepsilon(t)\, h(t)\, dt = 0.$$

Prin trecere la limită după ε obținem

$$\int_a^b f(t)\, h(t)\, dt = 0,\ f \in C([a, b]),$$

deci $h(t) = 0$ aproape peste tot în $[a, b]$, pe baza teoremei 0.4.19. De aici deducem că $h(t) = 0$ aproape peste tot în $\mathbf{R}$, ceea ce este absurd.

Punctul 1° ne arată că operatorul A este dens definit.

2° Fie $f(t) = (1 + t^2)^{-1/2}$. Arătați că $f \in H$, dar că $f \notin D(A)$; prin urmare, A nu este definit peste tot în H. Găsiți un șir $\{g_k\}_k \subset D(A)$ astfel încît $\|g_k\| \leqslant 1$ pentru orice k, dar $\|Ag_k\| \to \infty$ cînd $k \to \infty$.

3° Arătați că A este simetric, deci dacă $h \in D(A)$, atunci $h \in D(A^*)$ și $A^*h = Ah$.

4° Invers, arătați că, oricare ar fi $h \in D(A^*)$, avem $h \in D(A)$ și $A^*h = Ah$, adică faptul că A este autoadjunct.

3.9.4. Fie X un spațiu Banach și fie $\{T_k\}_k$ un șir în $\mathscr{L}(X)$. Se spune că șirul $\{T_k\}_k$ este *tare convergent* către operatorul $T \in \mathscr{L}(X)$ dacă $T_k x \to Tx (k \to \infty)$ pentru fiecare $x \in X$. Se spune că șirul $\{T_k\}_k$ este *slab convergent* către operatorul $T \in \mathscr{L}(X)$ dacă $x^*(T_k x) \to x^*(Tx)$ $(k \to \infty)$, oricare ar fi $x \in X$ și $x^* \in X^*$. Este limpede că orice șir $\{T_k\}_k \subset \mathscr{L}(X)$ care converge *uniform* [adică în norma lui $\mathscr{L}(X)$] către $T \in \mathscr{L}(X)$ este tare convergent către T; dacă șirul $\{T_k\}_k$ este tare convergent către T, atunci acesta este și slab convergent către T.

1° Fie $\{T_k\}_k \subset \mathscr{L}(X)$ un șir cu proprietatea că $\{T_k x\}_k$ este șir fundamental pentru fiecare $x \in X$. Folosind teorema 0.3.5, arătați că există $T \in \mathscr{L}(X)$ astfel încît $\{T_k\}_k$ să fie tare convergent către T.

2° Fie $\{T_k\}_k \subset \mathscr{L}(X)$ un șir cu proprietatea că $\{x^*(T_k x)\}_k$ este șir fundamental pentru fiecare $x^* \in X^*$ și $x \in X$. Tot în baza teoremei 0.3.5, arătați că există $T \in \mathscr{L}(X)$ astfel încît $\{T_k\}_k$ să fie slab convergent către T.

Indicație. Aplicați teorema 0.3.5 prima oară pe X^* și a doua oară pe X.

3.9.5. Fie Ω un spațiu topologic, fie H un spațiu Hilbert și fie $E: \mathrm{Bor}(\Omega) \to \mathscr{A}(H)$ o măsură spectrală. Fie, de asemenea, $\{f_k\}_k \subset B(\Omega)$ un șir cu proprietatea că $f_k(\omega) \to f(\omega)$ $(k \to \infty)$ și $|f_k(\omega)| \leqslant |f(\omega)|$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ pentru fiecare $\omega \in \Omega$, unde f este o anume funcție din $B(\Omega)$. Arătați că șirul de operatori

$$T_k = \int_\Omega f_k(\omega)\, dE(\omega) \in \mathscr{L}(H),\ k = 1, 2, 3, \ldots$$

este tare convergent (în sensul definit în exercițiul 3.9.4) către operatorul

$$T = \int_{\Omega} f(\omega)\, dE(\omega).$$

Indicație. Folosiți propoziția 2.2.12(3) și teorema 0.4.17.

3.9.6. Fie H un spațiu Hilbert, fie $A \in \mathscr{C}(H)$ un operator autoadjunct și fie $E : \mathrm{Bor}(\mathbf{R}) \to \mathscr{A}(H)$ măsura spectrală a lui A. Fie, de asemenea, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ o funcție boreliană arbitrară și fie $\{g_k\}_k \subset B(\mathbf{R})$ un șir cu proprietatea că $g_k(t) \to f(t)$ $(k \to \infty)$ și $|g_k(t)| \leqslant |f(t)|$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ pentru fiecare $t \in \mathbf{R}$. Fie $f(A)$ operatorul definit prin relația (3.3.1). Arătați că

$$D(f(A)) = \{x \in H : \lim_{k\to\infty} g_k(A)x \text{ există în } H\}$$

și că

$$f(A)x = \lim_{k\to\infty} g_k(A)\, x, \quad x \in D(f(A)).$$

Cu alte cuvinte, definiția operatorului $f(A)$ nu depinde de șirul de funcții din $B(\mathbf{R})$ care converge punctual (și dominat) către funcția f.

Indicație. Fie $x \in H$ pentru care șirul $\{g_k(A)x\}_k$ este convergent în H. Atunci

$$\int_{\mathbf{R}} |f(t)|^2\, d\langle E(t)\, x, x\rangle = \int_{\mathbf{R}} \lim_{k\to\infty} |g_k(t)|^2\, d\langle E(t), x, x\rangle \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbf{R}} |g_k(t)|^2 \quad d\langle E(t)x, x\rangle = \lim_{k\to\infty} \|g_k(A)\, x\|^2 < \infty,$$

în baza teoremei 0.4.6; prin urmare, $x \in D(f(A))$. Deoarece $|g_k(t) - f_k(t)|^2 \leqslant 4|f(t)|^2$ [f_k definit în (3.3.1)], în virtutea teoremei 0.4.17 putem scrie

$$\lim_{k\to\infty} \|g_k(A)x - f_k(A)x\|^2 = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbf{R}} |g_k(t) - f_k(t)|^2\, d\langle E(t)x, x\rangle = 0,$$

adică $g_k(A)x \to f(A)x$ $(k \to \infty)$.

Dacă $x \in D(f(A))$, convergența șirului $\{g_k(A)x\}_k$ la $f(A)x$ se obține asemănător.

3.9.7. Fie H și A ca în exercițiul 3.9.3. Fie T restricția lui A la spațiul $C_0(\mathbf{R})$ (definit la exercițiul 3.9.3). Utilizînd faptul că A este autoadjunct, precum și exercițiul 3.9.1, arătați că T este simetric, dar nu și autoadjunct.

3.9.8. Fie H un spațiu Hilbert și fie $J : H \to H$ o *conjugare* pe H, deci o aplicație cu proprietățile: $J(x + y) = J(x) + J(y)$, $J(\alpha x) = \bar{\alpha} J(x)$, $J(J(x)) = x$ și $\langle J(x), J(y)\rangle = \langle y, x\rangle$, oricare ar fi $x, y \in H$ și $\alpha \in \mathbf{C}$. Fie $T \in \mathscr{C}(H)$ un operator simetric cu proprietatea că $J(D(T)) \subset D(T)$ și $TJ(x) = J(Tx)$ pentru orice $x \in D(T)$. Arătați că un asemenea operator simetric are întotdeauna o extensie autoadjunctă.

Indicație. Arătați mai întîi că $J(D(T^*)) \subset D(T^*)$ și că $T^*J(x) = J(T^*x)$ pentru orice $x \in D(T^*)$. Arătați apoi că J stabilește o corespondență biunivocă între spațiile $N(T^* + i)$ și $N(T^* - i)$, care păstrează dimensiunea. Afirmația rezultă atunci din corolarul 3.4.11.

În particular, dacă $H = L^2(\Omega, \mu)$ (definit la exercițiul 0.6.23), putem defini conjugarea (naturală) $J : H \to H$ prin relația $(J(f))(\omega) = \overline{f(\omega)}$ $(\in H)$. În baza celor discutate, orice operator simetric $T \in \mathscr{C}(H)$ cu proprietatea că $T\bar{f} = \overline{Tf}$ [$f \in D(T)$] admite o extensie autoadjunctă.

3.9.9. Folosim notația din observația 3.5.4 Să definim cantitatea

$$\|\xi\|_0 = \lim_{k\to\infty} \|x_k\|_0, \quad \xi = \{x_k\}_k \in c(D). \tag{3.9.1}$$

1° Arătați că limita (3.9.1) există și are proprietățile: $\|\xi' + \xi''\|_0 \leqslant \|\xi'\|_0 + \|\xi''\|_0$ și $\|\alpha\xi\|_0 = |\alpha|\,\|\xi\|_0$ pentru orice ξ, ξ', $\xi'' \in c(D)$ și $\alpha \in \mathbf{C}$.

Este clar însă că (3.9.1) nu este o normă. Avem de fapt egalitatea

$$c_0(D) = \{\xi \in c(D) : \|\xi\|_0 = 0\}$$

și $c_0(D) \neq \{0\}$. Fie deci spațiul factor $H_0 = c(D)/c_0(D)$ pe care considerăm aplicația (3.5.1).

2° Arătați că mărimea $\|\xi + c_0(D)\|_0$ nu depinde de reprezentantul ξ și că ea definește o normă pe H_0.

3° Arătați că aplicația $D \ni x \to \xi_x + c_0(H)$ este o izometrie liniară, deci este, în particular, injectivă. Acest fapt ne permite să regăsim pe D, printr-o identificare, ca subspațiu liniar al lui H_0.

4° Arătați că subspațiul D (identificat cu subspațiul $\{\xi_x + c_0(D) : x \in D\}$) este dens în H_0.

5° Folosind punctul precedent, arătați că spațiul H_0 este complet.

6° Utilizînd faptul că D este prehilbertian, precum și teorema 0.2.15, arătați că H_0 este spațiu Hilbert, cu produsul scalar dat de (3.5.2).

3.9.10. Fie $\{\alpha_n\}_{n\geqslant 1}$ un șir de numere reale cu proprietatea că $\alpha_{n+m} \leqslant \alpha_n\,\alpha_m$ pentru orice întregi $n, m \geqslant 1$.

1° Arătați că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\alpha_n}{n} = \inf\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\alpha_n}{n}$.

Indicație. Se utilizează ideea din demonstrația lemei 3.6.3.

2° Fie B o algebră Banach cu unitate și fie $b \in B$. Utilizînd punctul precedent, arătați că $\{\|a^n\|^{1/n}\}_n$ este un șir numeric convergent (a se vedea și exercițiul 1.7.23).

3.9.11. Să se calculeze generatorul infinitezimal al semigrupului $\{e^{sB}\}_{s\geqslant 0}$, unde $B \in \mathcal{L}(X)$ (exemplul 3.6.2).

Indicație. Utilizînd estimarea

$$\|\tau^{-1}(e^{\tau B} - 1) - B\| \leqslant \tau^{-1}(e^{\tau\|B\|} - 1) - \|B\|, \quad \tau > 0$$

(a se vedea demonstrația lemei 3.6.11), se obține faptul că generatorul infinitezimal al semigrupului este chiar B.

3.9.12. Fie X un spațiu Banach și fie $T \in \mathcal{L}(X)$. Vom defini numerele

$$\nu^+(T) = \overline{\lim_{s\to+\infty}}\, s^{-1}(\ln\|e^{sT}\|), \quad \nu^-(T) = \lim_{s\to-\infty} s^{-1}(\ln|e^{sT}|).$$

Arătați că $\nu^\pm(T)$ sînt limite obișnuite și că

$$\nu^+(T) = \sup\{\operatorname{Re} z : z \in \sigma(T, X)\}, \quad \nu^-(T) = \inf\{\operatorname{Re} z : z \in \sigma(T, X)\}.$$

Indicație. Faptul că $\sup\{\operatorname{Re} z : z \in \sigma(T, X)\} \leqslant \nu^+(T)$ se obține din propoziția 3.6.9. Dacă inegalitatea ar fi strictă, am putea alege un pătrat Δ cu frontiera Γ, care conține pe $\sigma(T, X)$ în interior și lasă punctul $\nu^+(T)$ de pe axa reală în afară. Atunci, din formula integrală

$$e^{sT} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{sz}(z - T)^{-1}\,dz$$

se deduce o estimare de forma $\|e^{sT}\| \leqslant Ce^{s\rho}$, unde $C \geqslant 0$ și $\rho < \nu^+(T)$ nu depind de s. Este însă ușor de văzut că această estimare contrazice definiția numărului $\nu^+(T)$.

Toate proprietățile privitoare la numărul $\nu^-(T)$ se obțin din egalitatea $\nu^-(T) = \nu^+(-T)$.

3.9.13. Fie spațiul Banach $X = \{f \in C([0, 1]) : f(1) = 0\}$, cu topologia indusă de $C([0, 1])$. Vom presupune că fiecare funcție f din X este definită pe toată semiaxa $[0, \infty)$, punînd $f(t) = 0$ pentru $t \geqslant 1$. Vom putea deci considera operatorii

$$(T(s)f)(t) = f(t + s), \quad s \geqslant 0, \quad t \geqslant 0.$$

1° Arătați că familia $\{T(s)\}_{s \geqslant 0}$ este un semigrup tare continuu de operatori pe X.

Indicație. Folosind faptul că o funcție continuă pe un interval compact este uniform continuă ([12], 13.5).

2° Arătați că $\omega_0 = -\infty$ (ω_0 definit în propoziția 3.6.9).

3° Calculați generatorul infinitezimal B al semigrupului $\{T(s)\}_{s \geqslant 0}$ și arătați că $\sigma_\infty(B, X) = \{\infty\}$.

Indicație. Se va arăta că $D(B) = \{f \in X : f' \in X\}$ (unde f' este derivata funcției f) și că $Bf = f'$.

3.9.14. Fie X spațiul Banach al funcțiilor scalare, definite în intervalul $[0, \infty)$, pe care sînt presupuse a fi mărginite și uniform continue, cu norma dată de supremum. Fie operatorii

$$(T(s)f)(t) = f(t + s), \quad s \geqslant 0, \quad t \geqslant 0.$$

1° Arătați că $\{T(s)\}_{s \geqslant 0}$ este un semigrup tare continuu de operatori pe X și calculați generatorul său infinițezimal.

2° Arătați că are loc formula

$$f(t + s) = \lim_{\tau \to 0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{s}{\tau} \right)^k (\Delta_\tau^{(k)} f)(t), \tag{3.9.2}$$

unde

$$(\Delta_\tau^{(k)} f)(t) = ((T(\tau) - 1)^k f)(t) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{k-m} \binom{k}{m} f(t + m\tau)$$

este ceea ce numim *diferența de ordin* k a funcției f; în plus, suma (3.9.2) converge uniform în raport cu $t \in [0, \infty)$ și cu s aflat într-un interval compact arbitrar.

Indicație. Se explicitează afirmația propoziției 3.6.13.

3.9.15. Folosind exercițiul precedent, arătați că orice funcție $f \in C([0, 1])$ este limită uniformă pe $[0, 1]$ de restricții de polinoame (teorema clasică de aproximare a funcțiilor continue cu polinoame, datorată lui Weierstrass).

Indicație. Fie $f \in C([0, 1])$ pe care o prelungim pe $[0, \infty)$ punînd $f(t) = f(1)$ dacă $t \geqslant 1$. În acest mod obținem $f \in X$, unde X a fost definit în exercițiul anterior.

Fie $\varepsilon > 0$ și fie τ suficient de mic astfel încît

$$\left| f(s + t) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{s}{\tau} \right)^k (\Delta_\tau^{(k)} f)(t) \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{3.9.3}$$

pentru orice $t \in [0, \infty)$ și $s \in [0, 1]$, pe baza formulei (3.9.2). Punînd $t = 0$ și înlocuind seria din (3.9.3) cu o sumă parțială astfel încît restul să fie majorat de $\varepsilon/2$, obținem un polinom $p_\varepsilon(s)$ cu proprietatea că $|f(s) - p_\varepsilon(s)| < \varepsilon$ pentru orice $s \in [0, 1]$.

3.9.16. Arătați că în demonstrația teoremei 3.8.5 se poate utiliza următoarea variantă a teoremei lui Fubini:

Fie Ω_j spații topologice compacte, fie $\mu_j \in M(\Omega_j)$ $(j = 1, 2)$ și fie X un spațiu Banach. Pentru orice $F \in C(\Omega_1 \times \Omega_2, X)$ are loc egalitatea

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(\omega_1, \omega_2)\, d\mu_1 \times \mu_2(\omega_1, \omega_2) =$$

$$= \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} F(\omega_1, \omega_2)\, d\mu_2(\omega_2) \right) d\mu_1(\omega_1) = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} F(\omega_1, \omega_2)\, d\mu_1(\omega_1) \right) d\mu_2(\omega_2).$$

(Această afirmație se obține din exercițiul 0.6.24, via observația 1.1.8.2°.)

Indicație. Se ia spațiul compact $\Omega = \Omega_1 = \Omega_2 = [0, \infty]$ (privit ca închidere a lui $[0, \infty)$ în $\mathbf{C}_\infty$). Cu notația din demonstrația teoremei 3.8.5, vom fixa numerele reale α și β astfel încît $\operatorname{Im}\lambda < \alpha < 0$ și $\operatorname{Im}\mu < \beta < 0$. Atunci funcția

$$(s, t) \to e^{\alpha s + \beta t}\, e^{isA}\, e^{itB}\, x$$

este în $C(\Omega \times \Omega, H)$, iar măsurile $e^{(\operatorname{Im}\lambda - \alpha)s}\, ds$ și $e^{(\operatorname{Im}\mu - \beta)t}\, dt$ sînt mărginite pe Ω.

3.9.17. Fie H un spațiu Hilbert și fie $N = (N_1, \ldots, N_m)$ o familie finită de operatori normali care comută doi cîte doi. Fie, de asemenea, B_N și σ_N ca în exercițiul 2.6.8.

1° Considerăm un polinom P în variabilele $z_1, \ldots, z_m$ și fie $P(N) = P(N_1, \ldots, N_m)$. Demonstrați egalitatea

$$\sigma(P(N), H) = P(\sigma_N).$$

Indicație. Egalitatea $\sigma_{B_N}(P(N)) = P(\sigma_N)$ se obține din propoziția 0.5.6 și definiția mulțimii σ_N. Se demonstrează apoi că $\sigma_{B_N}(P(N)) = \sigma(P(N), H)$, utilizîndu-se tehnica din lema 2.3.3. Anume, incluziunea $\sigma(P(N), H) \subset \sigma_{B_N}(P(N))$ fiind clară, ne ocupăm doar de incluziunea inversă. Considerăm izomorfismul de C*-algebre $\Phi : C(\sigma_N) \to B_N$ dat de exercițiul 2.6.8. Să presupunem că

$$\sigma_{B_N}(P(N)) \setminus \sigma(P(N), H) \neq \emptyset$$

și să alegem o funcție nenulă $f \in C(\sigma_N)$ astfel încît

$$\operatorname{supp} f \cap P^{-1}(\sigma(P(N), H)) = \emptyset.$$

Definim apoi funcția $f_w(z) = (w - P(z))^{-1} f(z)$ pentru $z \in \sigma_N$, unde $w \notin P(\operatorname{supp} f)$, extinsă cu zero în afara mulțimii supp. f. Atunci

$$F(w) = \begin{cases} \Phi(f_w), & w \notin P(\operatorname{supp} f), \\ (w - P(N))^{-1}\Phi(f), & w \notin \sigma(P(N), H), \end{cases}$$

este o funcție corect definită, analitică în tot planul complex și nulă la infinit. Așadar, $\Phi(f) = 0$, deci $f = 0$, ceea ce este absurd.

2° Fie $\nu_j : \mathbf{C}^m \to \mathbf{C}$ proiecția pe coordonata de pe poziția j, deci $\nu_j(z) = z_j$, unde $z = (z_1, \ldots z_m)$. Atunci are loc egalitatea $\nu_j(\sigma_N) = \sigma(N_j, H)\ (j = 1, \ldots, m)$.

3° Fie $E : \operatorname{Bor}(\sigma_N) \to \mathscr{A}(H)$ măsura spectrală atașată familiei N (exercițiul 2.6.8) și fie

$$E_j(S) = E(\nu_j^{-1}(S)),\ S \in \operatorname{Bor}(\sigma(N_j, H)).$$

Atunci E_j este măsura spectrală atașată operatorului N_j $(j = 1, \ldots, m)$.

Indicație. În baza teoremei 2.2.10, E_j este măsură spectrală și are loc egalitatea

$$\int_{\sigma(N_j, H)} z_j\, dE_j(z_j) = \int_{\sigma_N} z_j\, dE(z) = N_j,$$

prin urmare E_j este măsura spectrală a operatorului normal N_j.

3.9.18. Fie H un spațiu Hilbert și fie $(A_1, \ldots, A_m) \subset \mathscr{C}(H)$ o familie finită de operatori autoadjuncți, care comută doi cîte doi (în sensul definiției 3.8.4). Utilizînd exercițiul precedent, arătați că există o măsură spectrală $E : \operatorname{Bor}(\mathbf{R}^m) \to \mathscr{A}(H)$ astfel încît

$$A_j x = \lim_{k \to \infty} \int_{\|t\| < k} t_j\, dE(t)x,\ x \in D(A_j),$$

unde

$$D(A_j) = \left\{ x \in H : \int_{\mathbf{R}^m} t_j^2 d\langle E(t)x, x\rangle < \infty \right\}\ (j = 1, \ldots, m).$$

Aici $t = (t_1, \ldots, t_m)$ este variabila spațiului $\mathbf{R}^m$ și $\|t\|^2 = t_1^2 + \ldots + t_m^2$.

Indicație. Fie $N_j = (\mathrm{i} - A_j)^{-1}$ $(j = 1, \ldots, m)$. În baza lemei 3.8.1, sistemul $N\,(=N_1, \ldots, N_m)$ este o familie de operatori normali care comută doi cite doi. Fie E_N : $\mathrm{Bor}(\sigma_N) \to \mathscr{A}(H)$ măsura spectrală atașată familiei N prin exercițiul 2.6.8. Vom defini o aplicație τ : $\sigma_N \to \mathbf{C}_\infty^m$ (unde $\mathbf{C}_\infty^m = \mathbf{C}_\infty \times \ldots \times \mathbf{C}_\infty$ de m ori) în modul următor : dacă $w = (w_1, \ldots, w_m) \in \sigma_N$ atunci $\tau(w) = z = (z_1, \ldots, z_m)$, unde $z_j = \mathrm{i} - w_j^{-1}$ dacă $w_j \neq 0$ și $z_j = \infty$ dacă $w_j = 0$., Să remarcăm că de fapt $\tau(\sigma_N) \subset \mathbf{R}_\infty^m$ ($\mathbf{R}_\infty^m$ este închiderea lui $\mathbf{R}^m$ în $\mathbf{C}_\infty^m$). Acest lucru rezultă din formula

$$\sigma(N_j, H) = \{(\mathrm{i} - t_j)^{-1} : t_j \in \sigma_\infty(A_j, H)\}$$

(teorema 1.6.11) și din faptul că dacă $w = (w_1, \ldots, w_m) \in \sigma_N$, atunci $w_j \in \sigma(N_j, H)$ (punctul 2^0 din exercițiul precedent). Vom defini măsura spectrală.

$$\tilde{E}(S) = E_N(\tau^{-1}(S)),\ S \in \mathrm{Bor}(\mathbf{R}_\infty^m).$$

Dacă vom arăta că $\tilde{E}(\mathbf{R}^m) = 1$, atunci restricția $E = \tilde{E} \mid \mathrm{Bor}(\mathbf{R}^m)$ va fi tot o măsură spectrală. Să dovedim deci că $\tilde{E}(\mathbf{R}^m) = 1$. Într-adevăr,

și

$$\mathbf{R}_\infty^m \setminus \mathbf{R}^m = (\{\infty\} \times \mathbf{R}_\infty^{m-1}) \cup \ldots \cup (\mathbf{R}_\infty^{m-1} \times \{\infty\}),$$

$$\tilde{E}((\{\infty\} \times \mathbf{R}_\infty^{m-1}) \cup \ldots \cup (\mathbf{R}_\infty^{m-1} \times \{\infty\})) = 0.$$

De fapt avem mai mult, anume

$$\tilde{E}(\{\infty\} \times \mathbf{R}_\infty^{m-1}) = \ldots = \tilde{E}(\mathbf{R}_\infty^{m-1} \times \{\infty\}) = 0.$$

Să obținem, de pildă, egalitatea cu zero la primul caz. Din definiția lui $\tilde{E}$ rezultă $\tilde{E}(\{\infty\} \times \mathbf{R}_\infty^{m-1}) = E_N(L_1)$, unde

$$L_1 = \{(0,\ w_2, \ldots, w_m) \in \sigma_N\}.$$

Pe de altă parte, dacă E_1 este măsura spectrală a operatorului N_1, din punctul 3^0 al exercițiului precedent rezultă $E_N(L_1) = E_1(\{0\})$. În sfîrșit, să remarcăm că $E_1(\{0\}) = 0$, fapt stabilit în demonstrația propoziției 3.2.5. Așadar, E este o măsură spectrală. Din acest moment demonstrația afirmațiilor decurge la fel cu demonstrația teoremei 3.2.6 (cu modificări minore), ținîndu-se seama de faptul că

$$N_j = \int_{\sigma_N} z_j \, dE_N(z) = \int_{\mathbf{R}^m} (\mathrm{i} - t_j)^{-1} \, dE(t),$$

în baza teoremei 2.2.10.

4. CLASE SPECIALE DE OPERATORI LINIARI

În acest capitol ne propunem să studiem cîteva clase particulare importante de operatori liniari, între care menționăm clasa operatorilor compacți și pe cea a operatorilor Fredholm.

4.1. OPERATORI COMPACȚI

Fie X și Y spații Banach, cu normele $\|\cdot\|_X$, respectiv $\|\cdot\|_Y$.

4.1.1. DEFINIȚIE. Un operator liniar $T : X \to Y$ se numește *compact* dacă pentru orice submulțime mărginită $M \subset X$ imaginea ei $T(M) \subset Y$ este relativ compactă.

4.1.2. EXEMPLE. 1° Fie $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ un număr finit de elemente ale spațiului X^* și fie $y_1, \ldots, y_m$ vectori din Y. Vom defini operatorul liniar

$$Tx = \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(x)\, y_k, \quad x \in X. \tag{4.1.1}$$

Deoarece imaginea lui T este conținută într-un subspațiu liniar al lui Y avînd dimensiunea finită (anume subspațiul liniar generat în Y de către vectorii $y_1, \ldots, y_m$), iar imaginea oricărei mulțimi mărginite prin T rămîne mulțime mărginită (deoarece $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ sînt continue), deci relativ compactă în virtutea unei proprietăți binecunoscute a spațiilor de dimensiune finită (a se vedea, de exemplu [4], cap. III, teorema 6.29), rezultă că T este operator compact.

Operatorii de forma (4.1.1) se numesc *operatori de rang finit.*

În particular, operatorul $T = 0 : X \to Y$ este compact.

2° Operatorul $1 : X \to X$ nu este compact, în general. Acest operator este compact dacă și numai dacă spațiul X are dimensiunea finită (afirmația se poate obține tot din rezultatul din [4] citat mai sus; a se vedea și exercițiul 4.6.2).

4.1.3. LEMĂ. *Fie $T : X \to Y$ un operator liniar. Următoarele afirmații sînt echivalente:*

(1) *T este operator compact;*

(2) *pentru orice mulțime mărginită $M \subset X$, mulțimea $T(M)$ este totai mărginită;*

(3) *pentru orice șir mărginit* $\{x_k\}_k \subset X$, *din șirul* $\{Tx_k\}_k \subset Y$ *se poate extrage un subșir convergent*;

(4) *dacă* $B = \{x \in X : \|x\|_X \leqslant 1\}$ *atunci* $T(B)$ *este mulțime relativ compactă.*

Demonstrație. Echivalența proprietăților (1), (2) și (3) se obține ușor din teorema 0.1.14. Este limpede apoi că (1) $\Rightarrow$ (4). Reciproc, dacă T are proprietatea (4) și dacă $M \subset X$ este o submulțime mărginită, atunci există un număr $r > 0$ astfel încît $M \subset rB = \{rx : x \in B\}$. Prin urmare, $T(M) \subset T(rB) = rT(B)$ și ultima mulțime este relativ compactă în baza ipotezei (și a continuității operației de înmulțire cu scalari).

4.1.4. OBSERVAȚIE. Dacă $T : X \to Y$ este un operator compact, atunci $T \in \mathscr{L}(X, Y)$. Într-adevăr,

$$\sup\{\|Tx\|_Y : x \in X, \quad \|x\|_X \leqslant 1\} < \infty,$$

ceea ce rezultă din mărginirea mulțimii (relativ compacte) $T(B)$, unde B este ca în lema precedentă. Vom face notația

$$\mathscr{K}(X, Y) = \{T : X \to Y : T \text{ compact}\} \tag{4.1.2}$$

În baza observației 4.1.4 avem $\mathscr{K}(X, Y) \subset \mathscr{L}(X, Y)$.

Fie Z un alt spațiu Banach. Dacă $\mathscr{S} \subset \mathscr{L}(X, Y)$ și $\mathscr{T} \subset \mathscr{L}(Y, Z)$, atunci $\mathscr{T} \cdot \mathscr{S}$ va desemna mulțimea $\{TS \in \mathscr{L}(X, Z) : S \in \mathscr{S}, \ T \in \mathscr{T}\}$.

4.1.5. PROPOZIȚIE. *Mulțimea* $\mathscr{K}(X, Y)$ *este un subspațiu liniar și închis în* $\mathscr{L}(X, Y)$. *În plus, avem incluziunile*:

$$\mathscr{L}(Y, Z) \cdot \mathscr{K}(X, Y) \subset \mathscr{K}(X, Z), \quad \mathscr{K}(X, Y) \cdot \mathscr{L}(Z, X) \subset \mathscr{K}(Z, Y). \tag{4.1.3}$$

Demonstrație. Fie $T_1, T_2 \in \mathscr{K}(X, Y)$ și fie mulțimea mărginită $M \subset X$. Atunci

$$\overline{(T_1 + T_2)(M)} \subset \overline{T_1(M)} + \overline{T_2(M)}.$$

Adunarea fiind operație continuă în Y, membrul al doilea al acestei relații este o submulțime compactă, deci și primul membru trebuie să fie submulțime compactă. Deoarece stabilitatea clasei $\mathscr{K}(X, Y)$ la înmulțirea cu scalari este evidentă, $\mathscr{K}(X, Y)$ este subspațiu liniar.

Să arătăm că familia $\mathscr{K}(X, Y)$ este subspațiu închis al lui $\mathscr{L}(X, Y)$. Fie deci $\{T_k\}_k \subset \mathscr{K}(X, Y)$ un șir care converge uniform către operatorul $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ și fie $M \subset X$ o parte mărginită. Fie, de asemenea, $\varepsilon > 0$ și $\alpha = \sup\{\|x\|_X : x \in M\}$. Vom fixa un număr natural k astfel încît $\|T_k - T\| < \varepsilon(1 + 2\alpha)^{-1}$. Deoarece $T_k(M)$ este total mărginită (lema 4.1.3), există o familie finită $\{x_1, \ldots, x_m\} \subset M$ cu proprietatea că

$$\sup_{x \in M} \inf_{1 \leqslant j \leqslant m} \|T_k x - T_k x_j\|_Y < \varepsilon(1 + 2\alpha)^{-1}.$$

Fie $y = Tx$ un element arbitrar din $T(M)$ și fie un indice j astfel încît $\| T_k x - T_k x_j \|_Y < \varepsilon(1 + 2\alpha)^{-1}$. Atunci

$$\| Tx - Tx_j \|_Y \leqslant \| T - T_k \| \| x \|_X + \| T_k x - T_k x_j \|_Y +$$

$$+ \| T - T_k \| \| x_j \|_X \leqslant \varepsilon\alpha(1 + 2\alpha)^{-1} + \varepsilon(1 + 2\alpha)^{-1} + \varepsilon\alpha(1 + 2\alpha)^{-1} = \varepsilon.$$

Așadar, mulțimea $T(M)$ este total mărginită, ceea ce asigură compacitatea operatorului T, în baza lemei 4.1.3.

Vom demonstra acum relațiile (4.1.3). Fie $T \in \mathscr{K}(X, Y)$ și $S \in \mathscr{L}(Y, Z)$. Dacă $M \subset X$ este o parte mărginită, atunci $(\overline{ST})(M) \subset S(\overline{T(M)})$, ceea ce arată că mulțimea $(ST)(M)$ este relativ compactă. Analog, dacă $T \in \mathscr{K}(X, Y)$, $V \in \mathscr{L}(Z, X)$ iar $L \subset Z$ este mărginită, atunci $V(L)$ este mărginită, deci $(TV)(L) = T(V(L))$ este relativ compactă. Demonstrația este completă.

4.1.6. COROLAR. *Familia* $\mathscr{K}(X) = \mathscr{K}(X, X)$ *este ideal bilateral închis în* $\mathscr{L}(X)$.

Demonstrație. Faptul că familia $\mathscr{K}(X)$ este ideal bilateral în $\mathscr{L}(X)$ rezultă ca un caz particular al relațiilor (4.1.3).

Rezultatul ce urmează este datorat lui Schauder.

4.1.7. PROPOZIȚIE. *Dacă* $T \in \mathscr{K}(X, Y)$, *atunci* $T^* \in \mathscr{K}(Y^*, X^*)$.

Demonstrație. Vom utiliza criteriul de compacitate Arzelà-Ascoli ([8], cap. IV, § 6; a se vedea și exercițiul 4.6.5).

Fie $M \subset Y^*$ o parte mărginită și fie $B \subset X$ ca în lema 4.1.3(4). Considerăm spațiul metric compact $\Omega = \overline{T(B)}$, pe care vom defini funcțiile

$$f_\varphi(y) = \varphi(y), \qquad \varphi \in M, \ y \in \Omega.$$

Este clar că $f_\varphi \in C(\Omega)$ pentru orice $\varphi \in M$. Avem apoi

$$\sup_{\varphi \in M} \| f_\varphi \| = \sup_{\varphi \in M} \sup_{y \in \Omega} | \varphi(y) | < \infty,$$

deoarece ambele mulțimi M și Ω sînt mărginite. În sfîrșit, deoarece

$$| f_\varphi(y_1) - f_\varphi(y_2) | = | \varphi(y_1 - y_2) | \leqslant \sup_{\varphi \in M} \| \varphi \| \| y_1 - y_2 \|,$$

obținem faptul că familia $\{f_\varphi\}_{\varphi \in M}$ este și egal continuă. În baza amintitului criteriu Arzelà-Ascoli, rezultă că familia $\{f_\varphi\}_{\varphi \in M}$ este relativ compactă în $C(\Omega)$.

Vom putea arăta acum că mulțimea $T^*(M)$ este relativ compactă. Va fi suficient să arătăm că pentru orice șir $\{\varphi_k\}_k \subset M$, din șirul $\{T^* \varphi_k\}_k$ se poate extrage un subșir convergent. În baza primei părți a demonstrației, înlocuind la nevoie șirul inițial cu un subșir al său, putem presupune că șirul $\{f_{\varphi_k}\}_k$ este convergent. Atunci

$$\| T^* \varphi_k - T^* \varphi_m \| = \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} | (T^* \varphi_k - T^* \varphi_m) x | =$$

$$= \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} | f_{\varphi_k}(Tx) - f_{\varphi_m}(Tx) | \leqslant \| f_{\varphi_k} - f_{\varphi_m} \|,$$

ceea ce arată convergența șirului $\{T^* \varphi_k\}_k$.

4.1.8. COROLAR. *Dacă* $X = Y = H$, *unde* H *este un spațiu Hilbert, atunci spațiul operatorilor compacți* $\mathscr{K}(H)$ *este invariant la involuția din* $\mathscr{L}(H)$.

4.2. SPECTRUL OPERATORILOR COMPACȚI

Fie X un spațiu Banach cu norma $\|\cdot\|$. Vom nota, ca în corolarul 4.1.6, cu $\mathscr{K}(X)$ familia operatorilor compacți din $\mathscr{L}(X)$.

4.1.2. LEMĂ. *Fie* $T \in \mathscr{K}(X)$ *și fie* $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$. *Dacă* $\lambda - T$ *este injectiv, atunci spațiul* $R(\lambda - T)$ *este închis în* X.

Demonstrație. Fie $y_k = (\lambda - T)x_k$ un șir convergent din $R(\lambda - T)$ către un anume vector $y \in X$. Există atunci două posibilități.

1) Șirul $\{x_k\}_k$ are un subșir mărginit. Atunci $\{Tx_k\}_k$ poate fi presupus convergent (înlocuindu-l eventual cu un subșir al său). În acest caz, șirul $x_k = \lambda^{-1}(y_k + Tx_k)$ este covergent către un vector $x \in X$, prin urmare $y = (\lambda - T)x \in R(\lambda - T)$

2) Șirul $\{x_k\}_k$ nu conține nici un subșir mărginit. Atunci $\|x_k\| \to \infty$ $(k \to \infty)$. Fie $v_k = \|x_k\|^{-1} x_k$. Avem $\|v_k\| = 1$ și $(\lambda - T)v_k = y_k/\|x_k\| \to 0$ $(k \to \infty)$. Înlocuind la nevoie șirul $\{Tv_k\}_k$ printr-un subșir al său, putem presupune că $\{Tv_k\}_k$ este convergent. Prin urmare, șirul $v_k = \lambda^{-1}(y_k/\|x_k\| + Tv_k)$ este convergent către un vector $v \in X$. Rezultă că $\|v\| = 1$ și că $(\lambda - T)v = 0$, ceea ce contrazice injectivitatea operatorului $\lambda - T$. Așadar, numai prima posibilitate se poate îndeplini, ceea ce implică faptul că $R(\lambda - T)$ este închis.

4.2.2. DEFINIȚII. Fie $T \in \mathscr{B}(X)$. Un număr $\lambda \in \mathbf{C}$ se numește *valoare proprie* a operatorului T dacă există un vector $x \in D(T)$, $x \neq 0$, astfel încît $Tx = \lambda x$. Elementul $x (\neq 0)$ se numește atunci *vector propriu* al operatorului T, corespunzînd valorii proprii λ.

Evident, valoarea proprie λ este în $\sigma(T, X)$.

4.2.3. COROLAR. *Fie* $T \in \mathscr{K}(X)$ *și fie* $\lambda \in \sigma(T, X)$, $\lambda \neq 0$. *Atunci* λ *este valoare proprie sau pentru* T *sau pentru* T^*.

Demonstrație. Dacă λ nu este valoare proprie pentru T, atunci operatorul $\lambda - T$ este injectiv, deci spațiul $R(\lambda - T)$ este închis, în baza lemei 4.2.1. Dacă am avea egalitatea $R(\lambda - T) = X$, atunci $\lambda - T$ ar fi inversabil, ceea ce contrazice apartenența punctului λ la spectru. Avem așadar $R(\lambda - T) \neq X$. În baza teoremei 0.3.8 (a se vedea și observația 0.3.9), există un element $x^* \in X^*$, $x^* \neq 0$, astfel încît $x^* | R(\lambda - T) = 0$. Atunci

$$((\lambda - T^*)x^*)(x) = x^*((\lambda - T)x) = 0, \quad x \in X,$$

deci x^* este vector propriu al operatorului T^* iar λ este valoare proprie.

4.2.4. OBSERVAȚIE. Dacă $X = H$, unde H este un spațiu Hilbert, corolarul 4.2.3 se enunță astfel. Fie $T \in \mathscr{K}(H)$ și fie $\lambda \in \sigma(T, H)$, $\lambda \neq 0$.

Atunci sau λ este valoare proprie pentru T sau $\bar{\lambda}$ este valoare proprie pentru T^*. Demonstrația este practic aceeași cu demonstrația corolarului 4.2.3 și o lăsăm pe seama cititorului.

Fie Y un subspațiu liniar și închis al spațiului Banach X. În cele ce urmează vom utiliza următoarea notație:

$$d(x, Y) = \inf_{y \in Y} \| x - y \|, \quad x \in X. \tag{4.2.1}$$

Numărul (4.2.1) reprezintă de fapt norma clasei $x + Y$ în spațiul factor X/Y (a se vedea exercițiul 4.6.6).

Rezultatul care urmează este cunscut sub numele de *lema lui Riesz* (a se vedea și exercițiul 4.6.2).

4.2.5. LEMĂ. *Fie Y un subspațiu liniar și închis al lui X, $Y \neq X$. Pentru orice $\varepsilon > 0$ există atunci un vector $x \in X$ astfel încît $\| x \| = 1$ și $d(x, Y) \geqslant 1 - \varepsilon$.*

Demonstrație. Fie $x_0 \notin Y$. Deoarece Y este închis, trebuie să avem $d = d(x_0, Y) > 0$. Vom alege apoi un vector $y_0 \in Y$ astfel încît $\|x_0 - y_0\| \leqslant d(1 - \varepsilon)^{-1}$ (putem, desigur, presupune că $\varepsilon < 1$ deoarece pentru $\varepsilon \geqslant 1$ lema este trivială). Fie $x_1 = x_0 - y_0$. Avem $\| x_1 \| \leqslant d(1 - \varepsilon)^{-1}$ și

$$d(x_1, Y) = \inf_{y \in Y} \|x_1 - y\| = \inf_{y \in Y} \|x_0 - y\| = d \geqslant (1 - \varepsilon) \|x_1\|.$$

Deoarece funcția (4.2.1) este omogenă pentru scalarii pozitivi, vom putea lua $x = x_1 / \|x_1\|$.

4.2.6. LEMĂ. *Fie $T \in \mathscr{K}(X)$ și $\{\lambda_k\}_k$ un șir de valori proprii distincte ale lui T. Atunci $\lambda_k \to 0$ $(k \to \infty)$.*

Demonstrație. Presupunînd că șirul $\{\lambda_k\}_k$ nu tinde către zero, deducem existența unui număr $\varepsilon_0 > 0$ astfel încît, înlocuind eventual șirul $\{\lambda_k\}_k$ printr-un subșir al său, să avem $|\lambda_k| \geqslant \varepsilon_0$ oricare ar fi k. Fie x_k un vector propriu corespunzînd valorii proprii λ_k, pentru fiecare k. Vom nota cu X_k spațiul liniar generat de familia de vectori $\{x_1, \ldots, x_k\}$. Deoarece dimensiunea algebrică a lui X_k este finită, spațiul X_k este închis în X (exercițiul 4.6.1). Evident, $X_k \subset X_{k+1}$. Vom arăta însă că $X_k \neq X_{k+1}$. Vom obține această afirmație dovedind prin recurență că vectorii $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sînt liniar independenți. Să presupunem că am arătat liniar independența vectorilor $x_1, \ldots, x_{k-1}$ și să admitem că am avea $x_k = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_{k-1} x_{k-1}$. Atunci

$$0 = (\lambda_k - T)x_k = \alpha_1(\lambda_k - \lambda_1)x_1 + \ldots + \alpha_{k-1}(\lambda_k - \lambda_{k-1})\, x_{k-1}.$$

Deoarece $\lambda_k - \lambda_j \neq 0$ pentru $1 \leqslant j \leqslant k - 1$, deducem că $\alpha_j = 0$ pentru orice j, adică $x_k = 0$, ceea ce nu se poate. Așadar, sistemul de vectori $x_1, \ldots, x_k$ este liniar independent.

În baza celor de mai înainte și a lemei 4.2.5, pentru fiecare $k \geqslant 2$ există un vector $y_k \in X_k$ astfel încît $\| y_k \| = 1$ și $d(y_k, X_{k-1}) \geqslant 1/2$. Deoarece $y_k = \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_k x_k$, avem

$$(\lambda_k - T)y_k = \beta_1(\lambda_k - \lambda_1)\, x_1 + \ldots + \beta_{k-1}(\lambda_k - \lambda_{k-1})x_{k-1} \in X_{k-1}.$$

Aşadar, dacă $m \gg k$,

$$\| \lambda_m^{-1} T y_m - \lambda_k^{-1} T y_k \| = \| y_m - (y_m - \lambda_m^{-1} T y_m + \lambda_k^{-1} T y_k) \| \geqslant 1/2,$$

deoarece $y_m - \lambda_m^{-1} T y_m + \lambda_k^{-1} T y_k \in X_{m-1}$. Aceasta ne arată că şirul $\{T(\lambda_k^{-1} y_k)\}_k$ nu conţine nici un subşir convergent, cu toate că şirul $\{\lambda_k^{-1} y_k\}_k$ este mărginit. Contradicţia obţinută ne arată că şirul $\{\lambda_k\}_k$ trebuie să conveargă către zero, ceea ce încheie demonstraţia.

4.2.7. LEMĂ. *Fie* $T \in \mathscr{K}(X)$ *şi fie* $\lambda \in \sigma(T, X)$, $\lambda \neq 0$. *Atunci* λ *este un punct izolat în mulţimea* $\sigma(T, X)$.

Demonstraţie. Dacă punctul λ nu ar fi izolat în $\sigma(T, X)$, atunci ar exista un şir $\{\lambda_k\}_k \subset \sigma(T, X)$ astfel încît $\lambda_k \neq \lambda_m$ pentru $k \neq m$ şi $\lambda_k \to \lambda$ cînd $k \to \infty$. Există două posibilităţi.

1) Şirul $\{\lambda_k\}_k$ are printre termenii săi o infinitate de valori proprii ale lui T. În acest caz, în baza lemei 4.2.6, un subşir al şirului precedent trebuie să conveargă către zero, deci $\lambda = 0$, ceea ce nu se poate.

2) Şirul $\{\lambda_k\}_k$ nu conţine o infinitate de valori proprii ale lui T. În acest caz, în virtutea corolarului 4.2.3, şirul $\{\lambda_k\}_k$ include o infinitate de valori proprii ale operatorului T^*, care este şi el compact (propoziţia 4.1.7). Aplicînd raţionamentul de la primul punct operatorului T^*, ajungem din nou la concluzia că $\lambda = 0$, ceea ce nu se poate. Aşadar, punctul λ trebuie să fie izolat în $\sigma(T, X)$.

4.2.8. LEMĂ. *Fie* $T \in \mathscr{K}(X)$ *şi fie* $\lambda \in \sigma(T, X)$, $\lambda \neq 0$. *Atunci* λ *este valoare proprie a operatorului* T.

Demonstraţie. Deoarece λ este un punct izolat în $\sigma(T, X)$, în baza corolarului 1.5.3 există un proiector P_λ cu proprietatea că spaţiul $X_\lambda = P_\lambda(X)$ este invariant la acţiunea lui T şi $\sigma(T, X_\lambda) = \{\lambda\}$ [dacă $\sigma(T, X) = \{\lambda\}$, vom lua $P_\lambda = 1$, deci $X_\lambda = X$]. Deoarece $\lambda \neq 0$, operatorul $T_\lambda = T|X_\lambda$ este inversabil. Operatorul T_λ fiind evident compact, din propoziţia 4.1.5 deducem că operatorul $T_\lambda^{-1} T_\lambda$ este compact; cu alte cuvinte, identitatea pe spaţiul X_λ este operator compact. Acest lucru nu este cu putinţă decît dacă dimensiunea spaţiului X_λ este finită (exemplul 4.1.2.2°). Pe un spaţiu de dimensiune finită, spectrul unui operator este format însă numai din valori proprii (exerciţiul 4.6.4). Aşadar, punctul λ este valoare proprie pentru operatorul T_λ, deci λ este valoare proprie pentr T.

4.2.9. OBSERVAŢIE. Fie $T \in \mathscr{C}(X)$ şi fie $\lambda \in \sigma(T, X)$. Dacă presupunem că λ este un punct izolat în $\sigma(T, X)$, atunci, ca în demonstraţia lemei precedente (folosind însă propoziţia 1.6.12) există un proiector P_λ (unic determinat în baza exerciţiului 1.7.21) astfel încît $X_\lambda = P_\lambda(X) \subset \subset D(T)$ să fie invariant la acţiunea operatorului T şi $\sigma(T, X_\lambda) = \{\lambda\}$. De fapt, P_λ este ceea ce numim (conform exerciţiului 1.7.21) proiectorul spectral ataşat operatorului T şi mulţimii $\{\lambda\}$. Dacă, în plus, spaţiul X_λ este de dimensiune finită, atunci λ este chiar valoare proprie pentru T.

Dimensiunea spațiului $X_\lambda = P_\lambda(X)$ va fi numită *multiplicitatea* valorii proprii λ, unde λ este o valoare proprie izolată arbitrară a operatorului T.

4.2.10. TEOREMĂ. *Fie* $T \in \mathscr{K}(X)$. *Atunci* $\sigma(T, X) \setminus \{0\}$ *este o mulțime cel mult numărabilă de valori proprii ale lui* T, *de multiplicitate finită, care se pot acumula cel mult în zero.*

Dacă dim $X = \infty$, *atunci* $0 \in \sigma(T, X)$. (Aici dim X desemnează *dimensiunea algebrică a* lui X).

Demonstrație. Lemele 4.2.6, 4.2.7, 4.2.8 și observația 4.2.9 ne arată că mulțimea $\sigma(T, X) \setminus \{0\}$ este formată din valori proprii izolate, de multiplicitate finită, care se pot acumula cel mult în zero. Este ușor de văzut că o asemenea mulțime este cel mult numărabilă (introducînd-o, de pildă, într-o reuniune de pătrate disjuncte, cu coordonate raționale).

În sfîrșit, dacă dim $X = \infty$ și $0 \notin \sigma(T, X)$, atunci $1 = T^{-1}T$ este operator compact, ceea ce nu se poate.

Vom încheia acest paragraf cu un rezultat privind *operatorii cu rezolvantă compactă* (sensul acestei expresii va rezulta din enunțul care urmează).

4.2.11. PROPOZIȚIE. *Fie* $T \in \mathscr{C}(X)$ *un operator cu proprietatea că* $(w_0 - T)^{-1} \in \mathscr{K}(X)$ *pentru un punct* $w_0 \notin \sigma(T, X)$. *Atunci* $\sigma(T, X)$ *este o mulțime formată din valori proprii izolate, de multiplicitate finită. În plus, operatorul* $(w - T)^{-1}$ *este compact, pentru orice* $w \notin \sigma(T, X)$.

Demonstrație. Fie $A_0 = (w_0 - T)^{-1}$. Deoarece mulțimea $\sigma(A_0, X)$ este imaginea mulțimii $\sigma(T, X)$ prin aplicația $z \to (w_0 - z)^{-1}$, este limpede că spectrul $\sigma(T, X)$ nu poate fi format decît din puncte izolate, care se pot acumula cel mult la infinit.

Să remarcăm apoi că proiectorul spectral corespunzînd operatorului T și mulțimii $\{\lambda\}$ coincide cu proiectorul spectral corespunzînd operatorului A_0 și mulțimii $\{\mu\}$, unde $\mu = (w_0 - \lambda)^{-1}$ este valoare proprie pentru A_0. Acest lucru rezultă din demonstrația propoziției 1.6.12 [a se vedea formula (1.6.4)]. În particular, λ este valoare proprie de multiplicitate finită.

Să mai remarcăm că avem egalitatea

$$(w - T)^{-1} = (w_0 - T)^{-1}(1 - (w - w_0)(w - T)^{-1}),$$

obținută din ecuația rezolvantă. Această egalitate ne arată că operatorul $(w - T)^{-1}$ este compact, oricare ar fi $w \notin \sigma(T, X)$, ceea ce încheie demonstrația.

Operatorii cu rezolvantă compactă se întîlnesc adesea în fizica matematică. Este vorba în special de operatori diferențiali, atașați problemelor la limită clasice (a se vedea, de pildă, [8], cap. XIX).

4.3. CLASELE SCHATTEN—VON NEUMANN

În acest paragraf vom lucra pe un spațiu Hilbert H cu produsul scalar $\langle ., . \rangle$. Scopul nostru este de a introduce unele subclase remarcabile ale familiei operatorilor compacți pe H.

Reamintim faptul că un operator pozitiv pe H are spectrul situat în semiaxa reală pozitivă (exercițiul 2.6.7). De asemenea, dat fiind un operator pozitiv, putem vorbi de rădăcina sa pătrată, care este tot un operator pozitiv (exercițiul 2.6.7).

4.3.1. LEMĂ. *Fie* $T \in \mathcal{K}(H)$. *Atunci operatorul* $A = (T^*T)^{1/2}$ *este compact (și poztiv).*

Demonstrație. Operatorul $B = T^*T$ este pozitiv și compact. Atunci rădăcina sa pătrată A există și este un operator pozitiv. Vom arăta că operatorul A este și compact. Într-adevăr, teorema de aproximare a lui Weierstrass (teorema 0.5.9 sau exercițiul 3.9.15) asigură existența unui șir de polinoame $\{p_k\}_k$ ce converge uniform pe intervalul $[0, \|B\|] \supset \supset \sigma(B, H)$ către funcția $\varphi(t) = t^{1/2}$. Deoarece $\varphi(0) = 0$, șirul $q_k(t) = p_k(t) - p_k(0)$ converge și el uniform către φ pe aceeași mulțime. Deoarece polinomul q_k nu are termen liber, operatorul $q_k(B)$ este compact (ca fiind o combinație liniară de operatori compacți). În baza teoremei 2.3.4 (și a propoziției 2.1.4) avem $q_k(B) \to \varphi(B) = A (k \to \infty)$, deci A este operator compact, în virtutea propoziției 4.1.5.

4.3.2. LEMĂ. *Fie* $A \in \mathcal{K}(H)$ *un operator pozitiv, fie* E *măsura spectrală a lui* A *și* $\lambda \in \sigma(A, H) \setminus \{0\}$. *Fie, de asemenea,* P_λ *proiectorul spectral atașat operatorului* A *și mulțimii* $\{\lambda\}$. *Atunci* $P_\lambda = E(\{\lambda\})$ *și* $H_\lambda = N(\lambda - A)$, *unde* $H_\lambda = P_\lambda(H)$. *În partieular,* $\dim H_\lambda < \infty$.

Demonstrație. Funcția caracteristică $\chi_{\{\lambda\}}$ este restricția funcției caracteristice χ_1 din demonstrația corolarului 1.5.3 (pentru mulțimea $K = \{\lambda\}$; cazul $\sigma(A, H) = \{\lambda\}$ este trivial). Întrucît calculul funcțional borelian îl extinde pe cel analitic, avem $E(\{\lambda\}) = \chi_{\{\lambda\}}(A) = \chi_1(A) = P_\lambda$, apoi

$$AE(\{\lambda\})\, x = \left(\int\limits_{\sigma(A,H)} t\, dE(t) \right) \left(\int\limits_{\{\lambda\}} dE(t) \right) x = \left(\int\limits_{\{\lambda\}} t\, dE(t) \right) x = \lambda E(\{\lambda\}) x,$$

de unde rezultă $A \mid H_\lambda = \lambda \mid H_\lambda$. Deci $H_\lambda \subset N(\lambda - A)$. Această incluziune este de fapt egalitate. Într-adevăr, dacă $x \in N(\lambda - A)$, este clar că și $E(\{\lambda'\})x \in N(\lambda - A)$, prin urmare, $y = (1 - E(\{\lambda\}))x \in N(\lambda - A)$. Pe de altă parte, $y \in (1 - P_\lambda)(H)$ și $\sigma(A, (1 - P_\lambda)(H)) \not\ni \lambda$ (ceea ce rezultă din teorema 1.5.2 și corolarul 1.5.3); prin urmare, din $(\lambda - A)y = 0$ obținem $y = 0$, adică $x \in H_\lambda$.

În sfîrșit, deoarece restricția operatorului A la spațiul H_λ este operator compact și multiplu scalar (nenul) al identității, va trebui să avem $\dim H_\lambda < \infty$.

4.3.3. DEFINIȚII. Fie $T \in \mathcal{K}(H)$ și fie $A = (T^*T)^{1/2}$. Știm că mulțimea $\sigma(A, H) \setminus \{0\}$ este cel mult numărabilă și conține numai valori proprii de multiplicitate finită ale operatorului A (teorema 4.2.10). În plus, aceste numere sînt pozitive. Vom așeza numerele din mulțimea $\sigma(A, H) \setminus \{0\}$ într-un șir descrescător, repetînd fiecare valoare proprie λ de un număr de ori egal cu multiplicitatea sa (egală cu $\dim H_\lambda$, folosind notația din

lema 4.3.2). Vom nota cu $\{s_k(T)\}_{k=1}^{\infty}$ şirul astfel obţinut, iar valorile $s_k(T)$ vor fi numite *numerele caracteristice* ale operatorului T.

Vom fixa un număr $p > 0$ şi vom defini cantitatea

$$\| T \|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} (s_k(T))^p \right)^{1/p}. \tag{4.3.1}$$

Vom nota cu $C_p(H)$ (sau simplu C_p) mulţimea operatorilor $T \in \mathcal{K}(H)$ cu proprietatea că $\| T \|_p < \infty$. Familiile de operatori $\{C_p\}_{p>0}$ vor fi numite *clasele Schatten-von Neumann*.

4.3.4. LEMĂ. *Fie $B \in \mathcal{K}(H)$ un operator pozitiv. Atunci numărul $\| B \|$ este valoare proprie a lui B.*

Demonstraţie. În virtutea teoremei 4.2.10, va fi suficient să arătăm că $\| B \| \in \sigma(B, H)$. Într-adevăr, dacă $r(B)$ este raza spectrală a lui B, atunci $r(B) = \| B \|$ [acest lucru rezultă din faptul că aplicaţia (2.2.1) este o izometrie]. Întrucît $\sigma(B, H)$ este o submulţime compactă a semiaxei pozitive, trebuie să avem $r(B) \in \sigma(B, H)$.

Rezultatul care urmează este cunoscut sub numele de „principiul minim-maxim". El oferă o formulă explicită de calcul pentru numerele caracteristice.

4.3.5. TEOREMĂ. *Fie $T \in \mathcal{K}(H)$. Numerele caracteristice ale operatorului T sînt date de formula*

$$s_{k+1}(T) = \min_{\substack{L \subset H \\ \dim L < k}} \max_{\substack{x \in L^{\perp} \\ \|x\| \leqslant 1}} \| Tx \|, \quad k \geqslant 0. \tag{4.3.2}$$

(Aici L desemnează un subspaţiu liniar de dimensiune finită în H).

Demonstraţie. Va fi suficient să arătăm că

$$(s_{k+1}(T))^2 = \min_{\substack{L \subset H \\ \dim L < H}} \max_{\substack{x \in L^{\perp} \\ \|x\| \leqslant 1}} \langle Bx, x \rangle, \; k \geqslant 0, \tag{4.3.3}$$

unde $B = T^* T = A^2$. Fie $\mu_k = (s_k(T))^2$. Din teorema de aplicaţie a spectrului (teorema 1.4.1) rezultă că $\{\mu_k\}_k$ sînt valorile proprii ale operatorului compact şi pozitiv B, aşezate în ordine descrescătoare. Să remarcăm că şi multiplicităţile lor coincid. Într-adevăr, dacă $\mu = \lambda^2$, unde $\lambda \in \sigma(A, H) \setminus \{0\}$, atunci $\chi_{\{\mu\}}(B) = \chi_{\{\mu\}}(A^2) = \chi_{\{\lambda\}}(A)$, întrucît $\chi_{\{\mu\}}(t^2) = \chi_{\{\lambda\}}(t)$ pentru $t \geqslant 0$. Dar $\chi_{\{\mu\}}(B)$ şi $\chi_{\{\lambda\}}(A)$ sînt chiar proiectorii spectrali ataşaţi respectiv operatorilor B şi A şi mulţimilor $\{\mu\}$ şi $\{\lambda\}$, cum rezultă din lema 4.3.2. Vom demonstra egalitatea (4.3.3) ţinînd seama de această semnificaţie a numerelor $\mu_k = (s_k(T))^2$.

Fie F măsura spectrală a operatorului B. Să remarcăm că şirul $\{\mu_k\}_k$ ste de forma

$$\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_{n_1} > \mu_{n_1+1} = \ldots = \mu_{n_2} > \mu_{n_2+1} = \ldots = \mu_{n_3} > \ldots$$

$$\ldots > \mu_{n_{p-1}+1} = \ldots = \mu_{n_p} > \ldots ;$$

prin urmare, şirul $\{\mu_{n_p}\}_{p=1}^{\infty}$ este descrescător şi este format din numere distincte. Fie $L_p = F(\{\mu_{n_p}\})(H)$. Avem $\dim L_p = n_p - n_{p-1}$ $(p > 1)$, pe

baza observației privind multiplicitățile valorilor proprii ale lui A și B. Este limpede că $L_p \perp L_q$ dacă $p \neq q$. Vom alege apoi bazele ortonormale $\{x_1, \ldots, x_{n_1}\}$ în L_1, $\{x_{n_1+1}, \ldots, x_{n_2}\}$ în L_2, $\{x_{n_{p-1}+1}, \ldots, x_{n_p}\}$ în L_p și așa mai departe. Avem deci un sistem ortonormal $\{x_k\}_k$ în H cu proprietatea că $Bx_k = \mu_k x_k$, oricare ar fi $k \geqslant 1$ (deoarece $B|L_p = \mu_{n_p}|L_p$, din lema 4.3.2). Vom demonstra egalitatea

$$\mu_{k+1} = \max_{\substack{x \in \{x_1, \ldots, x_k\}^\perp \\ \|x\| \leqslant 1}} \langle Bx, x\rangle, \quad k \geqslant 0. \tag{4.3.4}$$

Pentru aceasta vom considera spațiul Hilbert $H_k = \{x_1, \ldots, x_k\}^\perp$. Să remarcăm că $B(H_k) \subset H_k$. Într-adevăr, dacă $x \in H_k$, atunci

$$\langle Bx, x_j\rangle = \langle x, Bx_j\rangle = \mu_j \langle x, x_j\rangle = 0, \quad j = 1, \ldots, k.$$

Așadar, restricția $B_k = B|H_k$ este un operator compact și pozitiv pe H_k. Fie $\tilde{\mu}_{k+1} = \|B_k\|$. Vom arăta că $\tilde{\mu}_{k+1} = \mu_{k+1}$. Într-adevăr, în baza lemei 4.3.4, $\tilde{\mu}_{k+1}$ este cea mai mare valoare proprie a lui B_k. Întrucît $B_k x_{k+1} = Bx_{k+1} = \mu_{k+1} x_{k+1}$ și $x_{k+1} \in H_k$, rezultă $\tilde{\mu}_{k+1} \geqslant \mu_{k+1}$. Să presupunem acum $\tilde{\mu}_{k+1} > \mu_{k+1}$. Deoarece $\tilde{\mu}_{k+1}$ este valoare proprie și pentru B, există un indice n_p astfel încît $\mu_{n_p} = \tilde{\mu}_{k+1}$. În plus, $n_p \leqslant k$. Deoarece $L_p = N(\mu_{n_p} - B)$ (lema 4.3.2), va trebui să avem $L_p \cap H_k \neq \{0\}$. Acest lucru nu este cu putință deoarece L_p este conținut în spațiul generat de $\{x_1, \ldots, x_k\}$, spațiu ortogonal lui H_k. Așadar, trebuie să avem $\tilde{\mu}_{k+1} = \|B_k\| = \mu_{k+1}$. Prin urmare

$$\mu_{k+1} = \sup_{\substack{x \in H_k \\ \|x\| \leqslant 1}} \|B_k x\| \geqslant \sup_{\substack{x \in H_k \\ \|x\| \leqslant 1}} \langle Bx, x\rangle \geqslant \langle Bx_{k+1}, x_{k+1}\rangle = \mu_{k+1},$$

ceea ce arată că (4.3.4) are loc, supremumul fiind atins.

Pentru a obține formula (4.3.3) vom considera un subspațiu liniar $L \subset H$ cu $\dim L \leqslant k$. Fie M_{k+1} spațiul liniar generat de sistemul ortonormal $\{x_1, \ldots, x_{k+1}\}$. Să observăm că $L^\perp \cap M_{k+1} \neq \{0\}$. Într-adevăr, dacă $x = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_{k+1} x_{k+1}$ este un element din M_{k+1} și dacă $\{y_1, \ldots, y_m\}$ este o bază ortonormală în L ($m \leqslant k$), atunci sistemul de ecuații

$$\alpha_1 \langle x_1, y_j\rangle + \ldots + \alpha_{k+1} \langle x_{k+1}, y_j\rangle = 0, \quad j = 1, \ldots, m,$$

are cel puțin o soluție netrivială. Există deci un element de forma $x_0 = \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_{k+1} x_{k+1} \in L^\perp \cap M_{k+1}$ cu $\|x_0\| = 1$. Atunci

$$\sup_{\substack{x \in L^\perp \\ \|x\| \leqslant 1}} \langle Bx, x\rangle \geqslant \langle Bx_0, x_0\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{k+1} \mu_j \beta_j x_j, \sum_{j=1}^{k+1} \beta_j x_j \right\rangle =$$

$$= \sum_{j=1}^{k+1} \mu_j |\beta_j|^2 \geqslant \mu_{k+1} \sum_{j=1}^{k+1} |\beta_j|^2 = \mu_{k+1} \|x_0\|^2 = \mu_{k+1}.$$

Să remarcăm însă că

$$\sup_{\substack{x \in L^\perp \\ \|x\| \leqslant 1}} \langle Bx, x\rangle = \sup_{\substack{x \in L^\perp \\ \|x\| \leqslant 1}} \langle Q_L(B|L^\perp)x, x\rangle = \max_{\substack{x \in L^\perp \\ \|x\| \leqslant 1}} \langle Bx, x\rangle,$$

în care Q_L este proiecția spațiului H pe $L^\perp$, deoarece $Q_L(B|L^\perp)$ este un operator compact și pozitiv pe $L^\perp$ iar supremul este atins, ca în cazul formulei (4.3.4) (din pricina lemei 4.3.4). Așadar

$$\inf_{\substack{L\subset H\\ \dim L\leqslant k}} \max_{\substack{x\in L^\perp\\ \|x\|\leqslant 1}} \langle Bx, x\rangle \geqslant \mu_{k+1},$$

de unde obținem formula (4.3.3), via formula (4.3.4), aceasta din urmă arătînd că minimumul este atins pentru spațiul $L = M_k$.

Demonstrația este completă.

4.3.6. COROLAR. *Fie* $T_1, T_2 \in \mathscr{K}(H)$. *Atunci numerele caracteristice ale acestor operatori satisfac următoarele estimări* :

$$s_{n+m+1}(T_1 + T_2) \leqslant s_{n+1}(T_1) + s_{m+1}(T_2),$$

$$s_{n+m+1}(T_1 T_2) \leqslant s_{n+1}(T_1) s_{m+1}(T_2),$$

oricare ar fi numerele întregi $n \geqslant 0$, $m \geqslant 0$.

Demonstrație. Utilizînd formula (4.3.2), deducem următoarele estimări :

$$s_{n+m+1}(T_1 + T_2) = \min_{\substack{L\subset H\\ \dim L\leqslant n+m}} \max_{\substack{x\in L^\perp\\ \|x\|\leqslant 1}} \|(T_1 + T_2)x\| \leqslant$$

$$\leqslant \min_{\substack{L',L''\subset H\\ \dim L'\leqslant n\\ \dim L''\leqslant m}} \max_{\substack{x\in (L')^\perp \cap (L'')^\perp\\ \|x\|\leqslant 1}} (\|T_1 x\| + \|T_2 x\|) \leqslant$$

$$\leqslant \min_{\substack{L',L''\subset H\\ \dim L'\leqslant n\\ \dim L''\leqslant m}} \left(\max_{\substack{x\in (L')^\perp\\ \|x\|\leqslant 1}} \|T_1 x\| + \max_{\substack{x\in (L'')^\perp\\ \|x\|\leqslant 1}} \|T_2 x\|\right) =$$

$$= \min_{\substack{L'\subset H\\ \dim L'\leqslant n}} \max_{\substack{x\in (L')^\perp\\ \|x\|\leqslant 1}} \|T_1 x\| + \min_{\substack{L''\subset H\\ \dim L''\leqslant m}} \max_{\substack{x\in (L'')^\perp\\ \|x\|\leqslant 1}} \|T_2 x\| =$$

$$= s_{n+1}(T_1) + s_{m+1}(T_2).$$

Asemănător,

$$s_{n+m+1}(T_1 T_2) = \min_{\substack{L\subset H\\ \dim L\leqslant n+m}} \max_{\substack{x\in L^\perp\\ \|x\|\leqslant 1}} \|T_1 T_2 x\| \leqslant$$

$$\leqslant \min_{\substack{L',L''\subset H\\ \dim L'\leqslant n\\ \dim L''\leqslant m}} \max_{\substack{x\in (L')^\perp \cap (L'')^\perp\\ T_2 x\neq 0}} \frac{\|T_1(T_2 x)\|}{\|T_2 x\|} \frac{\|T_2 x\|}{\|x\|} \leqslant$$

$$\leqslant \min_{\substack{L',L''\subset H\\ \dim L'\leqslant n\\ \dim L''\leqslant m}} \max_{\substack{x\in (L')^\perp\\ T_2 x\neq 0}} \frac{\|T_1(T_2 x)\|}{\|T_2 x\|} \max_{\substack{x\in (L')^\perp\\ x\neq 0}} \frac{\|T_2 x\|}{\|x\|} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\min_{\substack{L' \subset H \\ \dim L' \leqslant n}} \max_{\substack{y \in (L')^{\perp} \\ y \neq 0}} \frac{\| T_1 y \|}{\| y \|} \right) \left(\min_{\substack{L'' \subset H \\ \dim L'' \leqslant m}} \max_{\substack{x \in (L'')^{\perp} \\ x \neq 0}} \frac{\| T_2 x \|}{\| x \|} \right) =$$

$$= s_{n+1}(T_1)\, s_{m+1}(T_2),$$

deoarece

$$\min_{\substack{L \subset H \\ \dim L \leqslant n}} \max_{\substack{x \in L^{\perp} \\ T_2 x \neq 0}} \frac{\| T_1 T_2 x \|}{\| T_2 x \|} \leqslant \min_{\substack{L \subset H \\ \dim L \leqslant n}} \max_{\substack{x \in (T_2^*(L))^{\perp} \\ T_2 x \neq 0}} \frac{\| T_1 T_2 x \|}{\| T_2 x \|} \leqslant$$

$$\leqslant \min_{\substack{L \subset H \\ \dim L \leqslant n}} \max_{\substack{y \in L^{\perp} \\ y \neq 0}} \frac{\| T_1 y \|}{\| y \|},$$

întrucît $\{L : \dim L \leqslant n\} \supset \{T_2^*(L) : \dim L \leqslant n\}$ şi $T_2(T_2^*(L)^{\perp}) \subset L^{\perp}$.

4.3.7. COROLAR. *Au loc estimările*

(1) $|s_n(T_1) - s_n(T_2)| \leqslant \|T_1 - T_2\|$;

(2) $s_n(TS) \leqslant s_n(T)\, \|S\|$;

(3) $s_n(ST) \leqslant \|S\|\, s_n(T)$,

oricare ar fi $T, T_1, T_2 \in \mathscr{K}(H)$, $S \in \mathscr{L}(H)$ *şi* $n \geqslant 1$.

Demonstraţie. Deoarece $n \geqslant 1$, corolarul precedent ne permite să scriem

$$s_n(T_1) \leqslant s_1(T_1 - T_2) + s_n(T_2);$$

Folosind şi relaţia simetrică, deducem

$$|s_n(T_1) - s_n(T_2)| \leqslant s_1(T_1 - T_2).$$

În baza formulei (4.3.2), avem însă egalităţile:

$$(s_1(T_1 - T_2))^2 = \max_{\substack{x \in H \\ \|x\| \leqslant 1}} \langle (T_1 - T_2)^* (T_1 - T_2)x, x \rangle =$$

$$= \max_{\substack{x \in H \\ \|x\| \leqslant 1}} \|(T_1 - T_2)x\|^2 = \|T_1 - T_2\|^2,$$

ceea ce implică estimarea (1).

Pentru a obţine (2), vom scrie

$$s_{n+1}(TS) = \min_{\substack{L \subset H \\ \dim L \leqslant n}} \max_{\substack{x \in L^{\perp} \\ x \neq 0}} \frac{\|TSx\|}{\|x\|} \leqslant$$

$$\leqslant \min_{\substack{L \subset H \\ \dim L \leqslant n}} \max_{\substack{x \in (S^*(L))^{\perp} \\ Sx \neq 0}} \frac{\|TSx\|}{\|Sx\|} \frac{\|Sx\|}{\|x\|} \leqslant$$

$$\leqslant \|S\| \min_{\substack{L\subset H\\ \dim L<n}} \max_{\substack{y\in L^{\perp}\\ y\neq 0}} \frac{\|Ty\|}{\|y\|} = \|S\|\, s_{n+1}(T),$$

pentru $n \geqslant 0$, în care am procedat ca în ultima parte a demonstrației corolarului precedent.

Demonstrația estimării (3) se obține direct din formule și va fi lăsată pe seama cititorului, ca exercițiu.

Pentru a obține unele afirmații legate de clasele Schatten-von Neumann, vom avea nevoie de cîteva inegalități clasice, pe care le vom reaminti în cele ce urmează. Fie $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ și $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ două șiruri de numere nenegative. Atunci au loc următoarele inegalități:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k\beta_k)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^{p'}\right)^{1/p'}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^{p''}\right)^{1/p''}, \tag{4.3.5}$$

unde p, p', p'' sînt numere pozitive satisfăcînd relația $1/p = 1/p' + 1/p''$;

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k+\beta_k)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^p\right)^{1/p} \tag{4.3.6}$$

pentru orice $p \geqslant 1$;

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k+\beta_k)^p \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^p + \sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^p \tag{4.3.7}$$

dacă $0 < p \leqslant 1$;

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^{p'}\right)^{1/p'} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^p\right)^{1/p} \tag{4.3.8}$$

dacă $0 < p \leqslant p'$.

Inegalitatea (4.3.5) este cunoscută sub denumirea de *inegalitatea Hölder* (a se vedea și exercițiul 4.6.8) iar (4.3.6) este *inegalitatea Minkowski* (exercițiul 4.6.9). Inegalitățile (4.3.7) și (4.3.8) sînt elementare (exercițiul 4.6.10).

4.3.8. PROPOZIȚIE. *Clasele* $\{C_p\}$ *au următoarele proprietăți*:

(1) *dacă* $p \leqslant p'$, *atunci* $C_p \subset C_{p'}$;

(2) *dacă* T_1, $T_2 \in C_p$, *atunci* $T_1 + T_2 \in C_p$;

(3) *dacă* $T_1 \in C_{p'}$ *și* $T_2 \in C_{p''}$, *atunci* $T_1T_2 \in C_p$, *unde* $1/p = 1/p' + 1/p''$;

(4) *dacă* $T \in C_p$ *și* $S \in \mathscr{L}(H)$, *atunci* ST, $TS \in C_p$.

Demonstrație. Dacă $p \leqslant p'$, atunci

$$\|T\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty}s_k(T)^p\right)^{1/p} \geqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty}s_k(T)^{p'}\right)^{1/p'} = \|T\|_{p'},$$

pe baza inegalității (4.3.8), prin urmare $C_p \subset C_{p'}$, adică (1).

Din corolarul 4.3.6 avem estimările :

$$s_{2n+1}(T_1 + T_2) \leqslant s_{n+1}(T_1) + s_{n+1}(T_2);$$

$$s_{2n+2}(T_1 + T_2) \leqslant s_{n+1}(T_1) + s_{n+2}(T)_2.$$

Dacă $p \geqslant 1$, pe baza inegalității (4.3.6) obținem

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} (s_{2k+1}(T_1 + T_2))^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=0}^{\infty} s_{k+1}(T_1)^p\right)^{1/p} +$$

$$+ \left(\sum_{k=0}^{\infty} s_{k+1}(T_2)^p\right)^{1/p} = \| T_1 \|_p + \| T_2 \|_p.$$

Asemănător,

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} (s_{2k+2}(T_1 + T_2))^p\right)^{1/p} \leqslant \| T_1 \|_p + \| T_2 \|_p,$$

de unde

$$\| T_1 + T_2 \|_p^p = \sum_{k=1}^{\infty} (s_k(T_1 + T_2))^p \leqslant 2(\| T_1 \|_p + \| T_2 \|_p)^p.$$

Așadar

$$\| T_1 + T_2 \|_p \leqslant 2^{1/p}(\| T_1 \|_p + \| T_2 \|_p),$$

ceea ce arată că $C_p + C_p \subset C_p$, adică afirmația (2) pentru $p \geqslant 1$.

Cazul $0 < p < 1$ se tratează în mod similar, înlocuindu-se inegalitatea (4.3.6) cu (4.3.7). Lăsăm detaliile pe seama cititorului.

Folosind încă o dată corolarul 4.3.6, obținem și estimările

$$s_{2n+1}(T_1 T_2) \leqslant s_{n+1}(T_1) s_{n+1}(T_2),$$

$$s_{2n+2}(T_1 T_2) \leqslant s_{n+1}(T_1)\, s_{n+2}(T_2).$$

Inegalitatea (4.3.5) ne permite atunci să scriem

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} s_{2k+1}(T_1 T_2)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=0}^{\infty} s_{k+1}(T_1)^{p'}\right)^{1/p'} \left(\sum_{k=0}^{\infty} s_{k+1}(T_2)^{p''}\right)^{1/p''} =$$

$$= \| T_1 \|_{p'} \| T_2 \|_{p''}.$$

În mod asemănător,

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} s_{2k+2}(T_1 T_2)^p\right)^{1/p} \leqslant \| T_1 \|_{p'} \| T_2 \|_{p''},$$

de unde se obține

$$\| T_1 T_2 \|_p \leqslant 2^{1/p} \| T_1 \|_{p'} \| T_2 \|_{p''},$$

ceea ce ne arată că și proprietatea (3) este adevărată.

În sfîrșit. din corolarul 4.3.7 deducem

$$\|ST\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} s_k(ST)^p\right)^{1/p} \leqslant \|S\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} s_k(T)^p\right)^{1/p} = \|S\| \|T\|_p$$

$$\|TS\|_p \leqslant \|T\|_p \|S\|$$

ceea ce atestă valabilitatea ultimei aiirmații.

4.3.9. COROLAR. *Clasa de operatori C_p este un ideal bilateral în $\mathscr{L}(H)$ pentru fiecare $p > 0$.*

Demonstrație. Proprietățile (2) și (4) arată închiderea clasei C_p față de operațiile de adunare și de înmulțire la dreapta și la stînga cu elemente din $\mathscr{L}(H)$.

Dintre toate clasele C_p. cele mai des întîlnite atît în teorie cît și în aplicații sînt C_1 (clasa operatorilor *nucleari*) și C_2(clasa operatorilor *Hilbert-Schmidt*). Se poate demonstra că relația (4.3.1) definește o normă care transformă clasa C_p într-un spațiu Banach. Aceste fapte precum și alte detalii privind clasele C_p pot fi găsite în tratatul [8], cap. XI.

4.4. OPERATORI CU IMAGINE ÎNCHISĂ

Fie X și Y spații Banach. Pentru simplitate, vom nota cu același simbol, anume $\|\cdot\|$, atît norma lui X cît și norma lui Y. În acest paragraf vom fi interesați de operatorii $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ a căror imagine $R(T)$ este un subspațiu închis în Y. Acești operatori vor fi desemnați sub numele de *operatori cu imagine închisă*. Există exemple simple de operatori continui a căror imagine nu este un subspațiu închis (exercițiul 4.6.11.1°.).

4.4.1. LEMĂ. *Fie $T \in \mathscr{L}(X, Y)$, fie $X_0 = N(T)$ și fie $T_0 : X/X_0 \to Y$ o aplicație definită prin egalitatea $T_0(x + X_0) = Tx$ pentru orice $x \in X$. Atunci T_0 este un operator liniar, injectiv și continuu.*

Demonstrație. Să observăm în primul rînd că X_0 este un subspațiu închis în X (ca fiind nucleul unui operator continuu), deci spațiul factor X/X_0 este un spațiu Banach (exercițiul 4.6.6), și că T_0 este o aplicație corect definită, deoarece dacă $Tx_1 = Tx_2$, atunci $x_1 - x_2 \in X_0$. Faptul că T_0 este operator liniar și injectiv se obține cu ușurință. Să arătăm că T_0 este un operator continuu. În baza teoremei 0.3.3 va fi suficient să arătăm că T_0 este un operator închis. Fie deci $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X/X_0$ un șir astfel încît $\xi_k \to \xi$ și $T_0\xi_k \to y$ cînd $k \to \infty$. Fără a micșora generalitatea (extrăgînd eventual un subșir din șirul inițial), vom putea presupune $\|\xi_{k+1} - \xi_k\| < 2^{-k-2}$ pentru orice $k \geqslant 1$. Procedînd ca în exercițiul 4.6.6, vom putea alege un șir $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ astfel încît $x_1 \in \xi_1$, $x_{k+1} \in \xi_{k+1} - \xi_k$ și $\|x_{k+1}\| < 2^{-k-1}$ pentru orice $k \geqslant 1$. Atunci seria $x_1 + x_2 + \ldots$ $\ldots + x_k + \ldots$ este absolut convergentă către un element $x \in X$. Deoarece $\xi_k \to x + X_0$ $(k \to \infty)$, este limpede că trebuie să avem $\xi = x + X_0$. Așadar, $T_0\xi_k = T(x_1 + \ldots + x_k) \to Tx = y$ $(k \to \infty)$. Prin urmare, operatorul T_0 este închis, deci continuu, fiind definit peste tot.

4.4.2. COROLAR. *Fie* $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ *un operator cu imagine închisă și fie* $T_0 : X/X_0 \to Y_0 \subset Y$ *operatorul dat de lema precedentă, unde* $Y_0 = R(T)$. *Atunci operatorul* $T_0^{-1} : Y_0 \to X/X_0$ *este continuu.*

Demonstrație. Operatorul T_0^{-1} există pe $R(T)$ în baza lemei precedente și este închis, ca invers de operator închis. Spațiul $Y_0 = R(T)$ fiind închis, folosind teorema 0.3.3, putem afirma că T_0^{-1} este continuu.

4.4.3. COROLAR. *Fie* $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ *un operator cu imagine închisă. Există atunci o constantă* $C > 0$ *astfel încît oricare ar fi* $y \in R(T)$ *să existe,* $x \in X$ *satisfăcînd* $Tx = y$ *și* $\| x \| \leqslant C \| y \|$.

Demonstrație. Fie T_0 ca în corolarul precedent și fie $C > \| T_0^{-1} \|$ un număr fixat. Atunci, dacă $y \in R(T)$ și $\xi = T_0^{-1} y$, avem $\| \xi \| < C \| y \|$. Această inegalitate fiind strictă, din definiția normei pe spațiul factor (exercițiul 4.6.6) rezultă că putem alege $x \in \xi$ astfel încît $\| x \| \leqslant C \| y \|$. Evident, $Tx = y$.

4.4.4. DEFINIȚIE. *Fie* $T \in \mathscr{L}(X, Y)$. Vom defini *modulul minimal redus* al lui T prin relația

$$\gamma(T) = \sup \{\gamma \geqslant 0 : \| Tx \| \geqslant \gamma d(x, N(T)), \quad x \in X\}. \tag{4.4.1}$$

Să remarcăm că pentru $T = 0$ avem $\gamma(T) = \infty$.

4.4.5. LEMĂ. *Fie* $T \in \mathscr{L}(X, Y)$. *Atunci* $\gamma(T) > 0$ *dacă și numai dacă* T *are imaginea închisă.*

Demonstrație. Să presupunem că T are imaginea închisă. Fie $C > 0$ constanta dată de corolarul 4.4.3. Atunci, oricare ar fi $y \in R(T)$, există $x \in X$ astfel încît $Tx = y$ și

$$\| Tx \| \geqslant C^{-1} \| x \| \geqslant C^{-1} \inf_{v \in N(T)} \| x + v \| = C^{-1} d(x, N(T)).$$

aici rezultă că $\gamma(T) \geqslant C^{-1} > 0$.

Reciproc, să presupunem că $\gamma(T) > 0$. Fie T_0 operatorul dat de lema 4.4.1. Deoarece T_0 este injectiv, operatorul T_0^{-1} există pe $R(T)$ și este închis. Luînd un număr pozitiv $\gamma < \gamma(T)$, din definiția modulului minimal redus rezultă

$$\| Tx \| \geqslant \gamma d(x, N(T)) = \gamma \| x + N(T) \|, \quad x \in X;$$

prin urmare

$$\| T_0^{-1}(Tx) \| = \| x + N(T) \| \leqslant \gamma^{-1} \| Tx \|,$$

deci operatorul T_0^{-1} este mărginit. Operatorul T_0^{-1} fiind închis și mărginit, domeniul său de definiție $R(T)$ trebuie să fie un subspațiu închis în Y, deci T are imaginea închisă.

4.4.6. OBSERVAȚIE. Dacă $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ este un operator cu imagine închisă, atunci avem egalitatea $\gamma(T) = \| T_0^{-1} \|^{-1}$, unde T_0 este operatorul din corolarul 4.4.2. Într-adevăr, prima parte a demonstrației lemei 4.4.5 și alegerea constantei C în demonstrația corolarului 4.4.3 ne arată că

$$\gamma(T) \geqslant \sup \{C^{-1} : C > \| T_0^{-1} \|\} = \| T_0^{-1} \|^{-1}.$$

Partea a doua a demonstrației lemei 4.4.5 ne spune că

$$\| T_0^{-1} \| \leqslant \inf\{\gamma^{-1} : \gamma < \gamma(T)\} = \gamma(T)^{-1}.$$

4.4.7. LEMĂ. *Fie* $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ *un operator cu imagine închisă. Dacă* $X_1 \supset N(T)$ *este un subspațiu închis în* X, *atunci* $T(X_1)$ *este închis în* Y.

Demonstrație. Deoarece X_1 este închis în X, spațiul factor $X_1/N(T)$ este închis în $X/N(T)$ (exercițiul 4.6.6.3°).

În virtutea corolarului 4.4.2, operatorul $T_0 : X/N(T) \to R(T)$ este un izomorfism topologic. De aici rezultă că $T(X_1) = T_0(X_1/N(T))$ trebuie să fie închis în $R(T)$, deci în Y.

4.4.8. PROPOZIȚIE. *Fie* $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ *un operator cu proprietatea* $\dim Y/R(T) < \infty$. *Atunci* T *are imaginea închisă.*

Demonstrație. Vom arăta mai întîi că există un subspațiu liniar $M \subset Y$ cu $\dim M = \dim Y/R(T)$, astfel încît $R(T) + M = Y$ și $R(T) \cap M = \{0\}$. Într-adevăr, fie o bază $\{\eta_1, \ldots, \eta_m\}$ a spațiului $Y/R(T)$. Vectorii η_j fiind de forma $y_j + R(T)$ $(j = 1, \ldots, m)$, fixînd $y_j \in \eta_j$, vom arăta că sistemul de vectori $\{y_1, \ldots, y_m\}$ este liniar independent în Y. Într-adevăr, o combinație liniară de forma $\alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_m y_m = 0$ ne conduce la relația $\alpha_1 \eta_1 + \ldots + \alpha_m \eta_m = 0$ deci trebuie să avem $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0$. Fie M spațiul generat în Y de sistemul de vectori $\{y_1, \ldots, y_m\}$. Fie $y \in Y$ un vector arbitrar. Deoarece $y + R(T) = \lambda_1 \eta_1 + \ldots + \lambda_m \eta_m$, atunci $y - \lambda_1 y_1 - \ldots - \lambda_m y_m \in R(T)$, deci $y \in M + R(T)$. Apoi, dacă $y \in R(T) \cap M$ și dacă $y = \mu_1 y_1 + \ldots + \mu_m y_m$, atunci $\mu_1 \eta_1 + \ldots + \mu_m \eta_m = 0$, deci $\mu_1 = \ldots = \mu_m = 0$, adică $y = 0$.

Deoarece dim $M < \infty$, rezultă că M este subspațiu închis în Y (exercițiul 4.6.1). Vom considera spațiul $X_1 = X \times M$ și vom defini un operator $T_1 : X_1 \to Y$ prin relația $T_1((x, v)) = Tx + v$ $(x \in X, v \in M)$, care este continuu și surjectiv, ceea ce se verifică ușor. Mai observăm că $N(T_1) = N(T) \times \{0\}$. Deoarece $X \times \{0\} \supset N(T_1)$, subspațiul $T_1(X \times \{0\}) = T(X)$ este închis în Y în baza lemei 4.4.7, ceea ce încheie demonstrația.

4.4.9. PROPOZIȚIE. *Fie* $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ *un operator cu imagine închisă. Atunci* $T^* \in \mathscr{L}(Y^*, X^*)$ *este un operator cu imagine închisă.*

Demonstrație. Vom arăta egalitatea

$$R(T^*) = \{x^* \in X^* : x^*(x) = 0, \quad x \in N(T)\}, \tag{4.4.2}$$

de unde va rezulta, în particular, că $R(T^*)$ este un subspațiu închis [membrul al doilea din (4.4.2) fiind subspațiu închis].

Fie $x^* \in R(T^*)$, deci $x^* = T^* y^*$ pentru un vector $y^* \in Y^*$. Atunci, oricare ar fi $x \in N(T)$, avem $x^*(x) = T^* y^*(x) = y^*(Tx) = 0$; prin urmare, x^* aparține spațiului din membrul al doilea al relației (4.4.2).

Reciproc, fie $x^* \in X^*$ astfel încît $x^*(x) = 0$ pentru orice $x \in N(T)$. Vom nota $Y_0 = R(T) \subset Y$ și vom defini o funcțională liniară y_0^* pe Y_0 punînd $y_0^*(Tx) = x^*(x)$ $(x \in X)$. Definiția este corectă, deoarece, dacă $Tx_1 = Tx_2$, atunci $x_1 - x_2 \in N(T)$, deci $x^*(x_1) = x^*(x_2)$. Fie $C > 0$ o

constantă ca în corolarul 4.4.3. Pentru fiecare $y \in Y_0$ vom alege un $x \in X$ astfel încît $y = Tx$ și $\|x\| \leqslant C\|y\|$. Atunci

$$|y_0^*(Tx)| = |x^*(x)| \leqslant C\|x^*\|\,\|Tx\|$$

și relația se extinde prin continuitate la subspațiul închis $\overline{Y}_0$, ceea ce demonstrează că $y_0^* \in \overline{Y}_0^*$. În virtutea teoremei 0.3.8, există o funcțională $y^* \in Y^*$ care extinde funcționala y_0^*. Din acest motiv, vom avea

$$(T^*y^*)(x) = y^*(Tx) = y_0^*(Tx) = x^*(x), \quad x \in X,$$

adică $T^*y^* = x^*$, ceea ce încheie demonstrația egalității (4.4.2) și deci a propoziției.

4.4.10. OBSERVAȚIE. Fie $T \in \mathscr{L}(X, Y)$. Este ușor de văzut că

$$N(T^*) = \{y^* \in Y^* : y^*(Tx) = 0,\ x \in X\}.$$

Lăsăm verificarea acestei egalități pe seama cititorului.

4.4.11. LEMĂ. *Fie $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ un operator cu imagine închisă. Atunci are loc egalitatea*

$$R(T) = \{y \in Y : y^*(y) = 0, \quad y^* \in N(T^*)\}. \tag{4.4.3}$$

Demonstrație. Dacă $y \in R(T)$, atunci $y = Tx$ pentru un $x \in X$. Prin urmare, pentru orice $y^* \in N(T^*)$ avem $y^*(y) = y^*(Tx) = T^*y^*(x) = 0$.

Reciproc, dacă $y \in Y$ are proprietatea $y^*(y) = 0$ pentru orice $y^* \in N(T^*)$, presupunînd că $y \notin R(T)$ am putea construi un element $y^* \in Y^*$ astfel încît $y^*|R(T) = 0$, dar $y^*(y) \neq 0$ (teorema 0.3.8). Atunci $y^* \in N(T^*)$, pe baza observației 4.4.10; prin urmare $y^*(y) = 0$, ceea ce nu se poate. Așadar, avem egalitatea (4.4.3).

4.5. OPERATORI FREDHOLM

Ca și în paragraful precedent, X și Y vor fi două spații Banach.

4.5.1. DEFINIȚII. Un operator $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ se numește *Fredholm* dacă $\dim N(T) < \infty$ și $\dim Y/R(T) < \infty$.

Definim *indexul* operatorului Fredholm T prin egalitatea

$$\operatorname{ind}(T) = \dim N(T) - \dim Y/R(T).$$

4.5.2. OBSERVAȚII. 1°. Dacă $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ este un operator Fredholm, în baza propoziției 4.4.8 operatorul T are imaginea închisă.

2° Dacă X și Y sînt spații de dimensiune finită, atunci, oricare ar fi $T \in \mathscr{L}(X, Y)$, avem

$$\operatorname{ind}(T) = \dim X - \dim Y.$$

Într-adevăr, dacă X_1 este un complement al spațiului $X_0 = N(T)$, atunci X_1 este izomorf cu $Y_1 = R(T)$. Considerînd un complement Y_0 al lui

Y_1 și Y (a se vedea demonstrația propoziției 4.4.8), vom avea dim $Y_0 =$ $=$ dim $Y/R(T)$. Așadar

$$\text{ind}(T) = \dim X_0 - \dim Y_0 = \dim X_0 + \dim X_1 - \dim Y_0 -$$

$$- \dim Y_1 = \dim X - \dim Y.$$

Acest lucru ne arată că operatorii Fredholm sînt lipsiți de interes în spații de dimensiune finită. Ei devin interesanți în spații de dimensiune infinită.

3° Orice operator inversabil este operator Fredholm, avînd indexul zero. În particular, identitatea pe un spațiu Banach este operator Fredholm de index zero. Operatorul identic nul este Fredholm dacă și numai dacă spațiile între care acționează sînt de dimensiune finită.

4.5.3. LEMĂ. *Fie* $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ *un operator injectiv, cu imagine închisă. Dacă* $\widetilde{T} \in \mathscr{L}(X, Y)$ *are proprietatea că* $\| \widetilde{T} - T \| < \gamma(T)$, *atunci* $\widetilde{T}$ *este injectiv, cu imagine închisă.*

Demonstrație. Fie $\delta = \| \widetilde{T} - T \|$ și fie $\gamma > 0$ astfel încît $\delta < \gamma < \gamma(T)$. Deoarece T este injectiv, din (4.4.1) deducem că $\| Tx \| \geqslant \gamma \| x \|$, oricare ar fi $x \in X$. Să observăm că

$$\| \widetilde{T}x \| \geqslant \| Tx \| - \| (\widetilde{T} - T)x \| \geqslant (\gamma - \delta) \| x \|, \quad x \in X.$$

De aici rezultă că $\widetilde{T}$ este injectiv, și $\gamma(\widetilde{T}) > 0$. În consecință, $\widetilde{T}$ are imaginea închisă, în virtutea lemei 4.4.5.

4.5.4. LEMĂ. *Fie* $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ *un operator surjectiv. Dacă* $\widetilde{T} \in \mathscr{L}(X, Y)$ *și* $\| \widetilde{T} - T \| < \gamma(T)$, *atunci și* $\widetilde{T}$ *este surjectiv.*

Demonstrație. Fie $\delta = \| \widetilde{T} - T \|$ și fie $r > \gamma(T)^{-1}$ astfel încît $r\delta < 1$ Vom fixa un vector $y \in Y$. Atunci există $x_1 \in X$ astfel încît $Tx_1 = y$ și $\| x_1 \| \leqslant r \| y \|$.

Fie apoi $y_1 = y - \widetilde{T}x_1$. Avem $\| y_1 \| = \| Tx_1 - \widetilde{T}x_1 \| \leqslant \delta \| x_1 \| \leqslant$ $\leqslant r\delta \| y \|$. Există atunci $x_2 \in X$ cu $Tx_2 = y_1$ și $\| x_2 \| \leqslant r \| y_1 \| \leqslant r^2\delta \| y \|$. Notăm $y_2 = y_1 - \widetilde{T}x_2$; avem $\| y_2 \| = \| Tx_2 - \widetilde{T}x_2 \| \leqslant r^2\delta^2 \| y \|$ și continuăm procedeul. Vom obține, în general, două șiruri $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ și $\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subset Y$ cu $\| x_k \| \leqslant r(r\delta)^{k-1} \| y \|$, $\| y_k \| \leqslant (r\delta)^k \| y \|$ și $y_k = y_{k-1} -$ $- \widetilde{T}x_k = y - \widetilde{T}x_1 - \ldots - \widetilde{T}x_k$ pentru orice $k \geqslant 1$ ($y_0 = y$). Să remarcăm că seria $x_1 + x_2 + \ldots + x_k + \ldots$ converge către un anume $x \in X$ și că $y_k \to 0$ ($k \to \infty$). Prin trecere la limită vom obține deci $\widetilde{T}x = y$, ceea ce ne arată că operatorul $\widetilde{T}$ este surjectiv.

4.5.5. COROLAR. *Fie* $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ *un operator bijectiv. Dacă* $\widetilde{T} \in$ $\in \mathscr{L}(X, Y)$ *are proprietatea* $\| \widetilde{T} - T \| < \gamma(T)$, *atunci* $\widetilde{T}$ *este și el bijectiv.*

Demonstrație. Afirmația rezultă prin combinarea lemelor 4.5.3 și 4.5.4.

Rezultatul care urmează este cunoscut ca *lema lui Auerbach.*

4.5.6. LEMĂ. *Fie X_0 un subspațiu liniar al spațiului Banach X cu* $\dim X_0 = n < \infty$. *Există atunci o bază* $\{x_1, \ldots, x_n\}$ *a lui* X_0 *și un sistem de funcționale liniare* $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \subset X^*$ *astfel încît* $\|x_j\| = \|\varphi_j\| = 1$, $\varphi_j(x_j) = 1$ $(j = 1, \ldots, n)$ *și* $\varphi_j(x_k) = 0$ $(j \neq k)$.

Demonstrație. Fie $\{v_1, \ldots, v_n\}$ o bază arbitrară a spațiului X_0. Pentru fiecare $y \in X_0$ avem deci o reprezentare unică de forma

$$y = \lambda_1(y)v_1 + \ldots + \lambda_n(y)v_n,$$

cu $\lambda_j(y) \in \mathbf{C}$. De fapt aplicația $y \to \lambda_j(y)$ este o funcțională liniară (din unicitatea reprezentării) și continuă pe X_0 (exercițiul 4.6.3) pentru fiecare indice j. Vom defini o funcție continuă $F : X_0^n \to \mathbf{C}$ (X_0^n fiind produsul cartezian $X_0 \times \ldots \times X_0$ de n factori) prin relația

$$F(y_1, \ldots, y_n) = \det(\lambda_j(y_k))_{j,k=1}^n, \; y_j \in X_0, \; j = 1, \ldots, n,$$

unde „det" înseamnă determinant. Fie $S_0 = \{y \in X_0 : \|y\| = 1\}$. Deoarece $\dim X_0 < \infty$, mulțimea S_0 este compactă (fiind închisă și mărginită). Atunci și mulțimea S_0^n este compactă în X_0^n. Funcția F fiind continuă, vom putea alege vectorii $x_j \in S_0$ $(j = 1, \ldots, n)$ astfel încît

$$|F(x_1, \ldots, x_n)| = \sup_{\substack{y_k \in S_0 \\ 1 \leqslant k \leqslant n}} |F(y_1, \ldots, y_n)| > 0.$$

Fixînd o asemenea familie $x_1, \ldots, x_n$, vom putea defini aplicațiile

$$\psi_j(x) = \frac{F(x_1, \ldots, x_{j-1}, x, x_{j+1}, \ldots, x_n)}{F(x_1, \ldots, x_n)}, \; x \in X_0, \; j = 1, \ldots n.$$

Evident, $\psi_j(x_j) = 1$ pentru orice j. În plus, ψ_j sînt aplicații liniare și $\psi_j(x_k) = 0$ pentru $j \neq k$, ceea ce rezultă din proprietățile elementare ale determinanților. În sfîrșit,

$$\|\psi_j\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |\psi_j(x)| = 1 = \|x_j\|, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

din modul în care am ales vectorii x_j. Vom extinde aplicațiile liniare ψ_j la întreg spațiul X, cu păstrarea normei, obținînd (respectiv) elemente $\varphi_j \in X^*$, ceea ce este posibil în virtutea teoremei 0.3.8. Este ușor de văzut că $\{x_1, \ldots, x_n\}$ trebuie să fie bază în X_0 (căci din orice combinație liniară de forma $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$ obținem $\alpha_j = 0$ pentru fiecare j, prin aplicarea funcționalei φ_j). Așadar, sistemele $\{x_1, \ldots, x_n\}$ și $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ satisfac cerințele lemei.

4.5.7. COROLAR. *Fie X_0 un subspațiu liniar al spațiului Banach X cu* $\dim X_0 = n < \infty$. *Există atunci o proiecție continuă* $P \in \mathscr{L}(X)$ *a spațiului X pe subspațiul X_0 cu* $\|P\| \leqslant n$.

Demonstrație. Cu notația din lema precedentă, vom defini aplicația

$$Px = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x)x_j \in X_0, \; x \in X.$$

Este ușor de văzut că $P^2x = Px$ pentru orice $x \in X$, deci P este proiecție (evident, pe X_0). În plus,

$$\|Px\| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \|\varphi_j\| \|x_j\| \|x\| \leqslant n\|x\|, \quad x \in X,$$

deci $\|P\| \leqslant n$.

4.5.8. LEMĂ. *Fie X_0, X_1 două subspații închise ale spațiului Banach X astfel încît $X_0 \cap X_1 = \{0\}$, $X_0 + X_1 = X$ și $\dim X_0 < \infty$. Fie apoi $T_j \in \mathscr{L}(X_j, Y)$ $(j = 0, 1)$. Vom defini operatorul $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ prin relația $T(x_0 + x_1) = T_0x_0 + T_1x_1$ $(x_0 \in X_0,\ x_1 \in X_1)$. Atunci avem egalitatea*

$$\dim N(T)/N(T_1) + \dim R(T)/R(T_1) = \dim X_0.$$

Demonstrație. Deoarece orice $x \in X$ se reprezintă în mod unic sub forma $x = x_0 + x_1$ cu $x_j \in X_j (j = 0, 1)$, operatorul T este corect definit. Aplicația $P_0 : X \to X_0$ dată de $P_0x = x_0$ $(x \in X)$ fiind proiecție continuă a lui X pe X_0 (exercițiul 4.6.13), rezultă că operatorul $T = T_0P_0 + T_1(1 - P_0)$ este continuu.

Din faptul că $\dim X_0 < \infty$, obținem că și $\dim R(T)_0 < \infty$. Vom scrie $R(T_0) = N_1 + N_2$, unde $N_1 = R(T_0) \cap R(T_1)$ iar N_2 este un complement al lui N_1 în $R(T_0)$; în particular, $N_1 \cap N_2 = \{0\}$. Evident, $R(T) = R(T_1) + N_2$, $N_2 \cap R(T_1) = \{0\}$, deci citul $R(T)/R(T_1)$ este algebric izomorf cu N_2. În particular, $\dim R(T)/R(T_1) = \dim N_2$.

Fie apoi $M_1 = T_0^{-1}(N_1)$. Notînd cu M_2 un complement al spațiului $N_0^{-1}(N_1) \cap T_0^{-1}(N_2)$ în $T_0^{-1}(N_2)$, în baza egalității $X_0 = T_0^{-1}(N_1) + T_0^{-1}(N_2)$ obținem $M_1 + M_2 = X_0$ și $M_1 \cap M_2 = \{0\}$. Mai mult decît atît, $T_0 : M_2 \to N_2$ este izomorfism. Într-adevăr, dacă $T_0x_2'' = 0$, unde $x_2'' \in M_2$, atunci $x_2'' \in T_0^{-1}(N_1) = M_1$, deci $x_2'' = 0$. Pe de altă parte, $N_2 \subset R(T_0)$, deci aplicația este surjectivă.

Fie acum $x = x_0 + x_1 \in N(T)$, unde $x_0 = x_0' + x_0''$ cu $x_0' \in M_1$, $x_0'' \in M_2$, $x_1 \in X_1$ și $T_0x_0' + T_0x_0'' + T_1x_1 = 0$. De aici rezultă $x_0'' = 0$ (pe baza faptului că $T_0 : M_2 \to N_2$ este izomorfism). Așadar, avem egalitatea

$$N(T) = \{x_0' + x_1 : x_0' \in M_1,\ x_1 \in X_1,\ T_0x_0' + T_1x_1 = 0\}.$$

Dacă vom considera aplicația liniară $S : R(T_1) \to X_1/N(T_1)$ dată de $S(T_1x_1) = x_1 + N(T_1)$ pentru $x_1 \in X_1$ (a se vedea și lema 4.4.1), deducem că spațiul $N(T)/N(T_1)$ este izomorf cu spațiul

$$\{(-ST_0x_0',\ x_0') : x_0' \in M_1\} \subset (X_1/N(T_1)) \times M_1$$

prin aplicația

$$x_0' + x_1 + N(T_1) \to (-ST_0x_0',\ x_0'),\ x_0' + x_1 \in N(T).$$

Este însă clar că spațiul $\{(-ST_0\, x_0',\ x_0') : x_0' \in M_1\}$ este izomorf la rîndul său cu M_1; prin urmare, $\dim N(T)/N(T_1) = \dim M_1$. Ținînd seama și de faptul că $\dim R(T)/R(T_1) = \dim N_2 = \dim M_2$ (obținut anterior), afirmația lemei se deduce cu ușurință.

În continuare, un operator T construit ca mai sus va fi numit *extensie* a operatorului T_1 *în sensul lemei* 4.5.8.

4.5.9. TEOREMĂ. *Fie* $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ *un operator Fredholm. Atunci există un număr* $\delta > 0$ *astfel încît dacă* $\widetilde{T} \in \mathscr{L}(X, Y)$ *satisface estimarea* $\|\widetilde{T} - T\| < \delta$, *rezultă că* $\widetilde{T}$ *este Fredholm,* $\dim N(\widetilde{T}) \leqslant \dim N(T)$, $\dim Y\,(R(\widetilde{T}) \leqslant \dim Y\,R(T)$ *şi* $\operatorname{ind}(\widetilde{T}) = \operatorname{ind}(\widetilde{T})$.

Demonstraţie. Deoarece operatorul T este Fredholm, subspaţiul $N = N(T)$ este de dimensiune finită; în plus, există un subspaţiu de dimensiune finită $M \subset Y$ astfel încît $R(T) + M = Y$ şi $R(T) \cap M = \{0\}$. Mai mult decît atît, $\dim M = \dim Y/R(T)$ (a se vedea demonstraţia propoziţiei 4.4.8).

Fie P o proiecţie a spaţiului X pe N (corolarul 4.5.7) şi fie $X_1 = (1 - P)(X)$. Definim apoi spaţiul $X_2 = X_1 \times M$ şi considerăm operatorul $T_2 : X_2 \to Y$ dat de relaţia

$$T_2((x, v)) = Tx + v, \quad x \in X_1, \quad v \in M.$$

Operatorul T_2 este bijectiv. Într-adevăr, dacă $y \in Y$, atunci $y = Tx_0 + v$ cu $x_0 \in X$ şi $v \in M$. Dacă $x = (1 - P)x_0$, atunci $Tx = Tx_0$, deci $T_2((x, v)) = Tx_0 + v = y$, adică T_2 este operator surjectiv. Apoi, dacă $Tx + v = 0$, avem $Tx = 0$ şi $v = 0$. Deoarece $T|X_1$ este injectiv, rezultă că $x = 0$ dacă $x \in X_1$. Aşadar, T_2 este şi injectiv.

Fie $\widetilde{T} \in \mathscr{L}(X, Y)$ un operator arbitrar. Să definim operatorul $\widetilde{T}_2 : X_2 \to Y$ prin relaţia

$$\widetilde{T}_2((x, v)) = \widetilde{T}x + v, \quad x \in X_1, \quad v \in M.$$

Să remarcăm că avem evaluarea

$$\|\widetilde{T}_2 - T_2\| = \sup_{\|(x, v)\| \leqslant 1} \|\widetilde{T}x - Tx\| \leqslant \|\widetilde{T} - T\|.$$

Prin urmare, dacă $\|\widetilde{T} - T\| < \delta$ cu $\delta > 0$ suficient de mic [de pildă, putem lua $\delta \leqslant \gamma(T_2)$], atunci şi operatorul $\widetilde{T}_2$ este bijectiv, pe baza corolarului 4.5.5. Să presupunem că o asemenea condiţie este îndeplinită. Fie $\widetilde{T}_1$ operatorul $\widetilde{T}|X_1$. Atunci $\widetilde{T}_2$ este o extensie a operatorului $\widetilde{T}_1$ în sensul lemei 4.5.8 (în care identificăm pe X_1 cu $X_1 \times \{0\}$ şi pe M cu $\{0\} \times M$). În virtutea lemei 4.5.8 vom putea scrie

$$\dim N(\widetilde{T}_2)/N(\widetilde{T}_1) + \dim R(\widetilde{T}_2)/R(\widetilde{T}_1) = \dim M.$$

Ştim însă că $\dim N(\widetilde{T}_2) = 0$, deci $\dim N(\widetilde{T}_1) = 0$; de asemenea, $R(\widetilde{T}_2) = Y$, deci $\dim Y/R(\widetilde{T}_1) = \dim M$.

Să remarcăm că şi operatorul $\widetilde{T}$ poate fi privit ca o extensie a operatorului $\widetilde{T}_1$ în sensul lemei 4.5.8. Putem scrie deci

$$\dim N(\widetilde{T})/N(\widetilde{T}_1) + \dim R(\widetilde{T})/R(\widetilde{T}_1) = \dim N.$$

Deoarece $N(\widetilde{T}_1) = \{0\}$, avem de fapt

$$\dim N(\widetilde{T}) + \dim R(\widetilde{T})/R(\widetilde{T}_1) = \dim N. \tag{4.5.1}$$

Întrucît $\dim Y/R(\widetilde{T}_1) = \dim M$ și

$$\dim Y/R(\widetilde{T}_1) = \dim Y/R(\widetilde{T}) + \dim R(\widetilde{T})/R(\widetilde{T}_1),$$

ceea ce rezultă dintr-un argument algebric simplu, vom putea scrie

$$\dim M = \dim N - \dim N(\widetilde{T}) + \dim Y/R(\widetilde{T}), \tag{4.5.2}$$

de unde

$$\operatorname{ind}(\widetilde{T}) = \dim N(\widetilde{T}) - \dim Y/R(\widetilde{T}) = \dim N - \dim M = \operatorname{ind}(T).$$

Din relația (4.5.1) deducem că $\dim N(\widetilde{T}) \leqslant \dim N$ iar din relația (4.5.2) se obține $\dim Y/R(\widetilde{T}) \leqslant \dim M$, ceea ce încheie demonstrația.

Teorema 4.5.9 este cunoscută ca *teorema de stabilitate a indexului operatorilor Fredholm la perturbații mici*. Ea exprimă, în particular, faptul că familia operatorilor Fredholm este o mulțime deschisă în spațiul $\mathscr{L}(X, Y)$. Mai mult decît atît, se pot găsi estimări mai precise pentru numărul δ din teorema 4.5.9 în funcție de datele inițiale (exercițiul 4.6.16).

Ne vom ocupa în continuare de proprietățile de stabilitate ale clasei operatorilor Fredholm la perturbațiile compacte. Vom începe printr-o caracterizare a operatorilor Fredholm.

4.5.10. TEOREMĂ. *Operatorul $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ este Fredholm dacă și numai dacă există $S_1, S_2 \in \mathscr{L}(Y, X)$, $K_1 \in \mathscr{K}(X)$ și $K_2 \in \mathscr{K}(Y)$ astfel încît $S_1 T = 1_X + K_1$ și $TS_2 = 1_Y + K_2$, unde 1_A, 1_Y sînt identitățile pe X, respectiv pe Y.*

Demonstrație. Vom arăta mai întîi suficiența condițiilor. Vom presupune deci că există operatorii S_1, S_2, K_1, K_2 cu proprietățile menționate și să arătăm că operatorul T este Fredholm.

Vom admite, prin absurd, că $\dim(N(T) = \infty$. În baza lemei 4.2.5, vom putea atunci găsi un șir $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset N(T)$ cu $\| x_k \| = 1$ pentru orice k și cu $\| x_k - x_m \| \geqslant 1/2$, ori de cîte ori $k \neq m$. În particular, șirul $\{x_k\}_k$ nu conține nici un subșir convergent. Pe de altă parte, putem scrie că $0 = S_1 T x_k = x_k + K_1 x_k$; operatorul K_1 fiind compact, din șirul $\{K_1 x_k\}_k$ se poate extrage un subșir convergent, deci șirul $\{x_k\}_k$ are un subșir convergent. Această concluzie este absurdă; prin urmare, $\dim N(T) < \infty$.

Vom arăta apoi că imaginea lui T este închisă. Să admitem că acest lucru este fals. Atunci există un șir $y_k = Tx_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ astfel încît $y_k \to 0$ iar $\| x_k + N(T) \| = 1$ (adică operatorul T_0 din lema 4.4.1 nu are invers continuu). Să observăm însă că $S_1 y_k = S_1 T x_k = x_k + K_1 x_k \to 0 (k \to \infty)$ și că șirul $\{K_1 x_k\}_k$ are un subșir convergent (deoarece $\| x_k + N(T) \| = 1$, reprezentanții x_k pot fi aleși astfel încît $\| x_k \| \leqslant 3/2$). Vom putea presupune, extrăgînd eventual un subșir, că $x_k \to x_0 \in X (k \to \infty)$, În plus, $Tx_k = y_k \to Tx_0 = 0$, adică $x_0 \in N(T)$. Acest lucru este imposibil întrucît $\| x_k + N(T) \| = 1 \to \| x_0 + N(T) \| = 1$. Așadar, spațiul $R(T)$ trebuie să fie închis.

În sfîrșit, să arătăm că $\dim Y/R(T) < \infty$. Dacă nu ar fi așa, aplicînd din nou lema 4.2.5 în spațiul $Y/R(T)$, am putea găsi un șir $\{\eta_k\}_k \subset Y/R(T)$ ce nu ar conține nici un subșir convergent, cu $\| \eta_k \| = 1$ pentru orice k. Să alegem apoi un vector $y_k \in \eta_k$ astfel încît $\| y_k \| \leqslant 3/2$. Avem egalitatea

$TS_1 y_k = y_k + K_2 y_k$, iar șirul $\{K_2 y_k\}_k$ are un subșir convergent. Atunci șirul $\eta_k = -K_2 y_k + R(T)$ conține un subșir convergent, ceea ce este absurd. Conchidem că operatorul T este Fredholm.

Invers, să presupunem că operatorul T este Fredholm. În particular, spațiul $R(T)$ este închis. Fie P o proiecție a spațiului X pe spațiul de dimensiune finită $N(T)$ și fie Q o proiecție a spațiului Y pe $R(T)$ (exercițiul 4.6.15). Fie apoi $T_0 : (1_X - P)(X) \to R(T)$ operatorul $T|(1_X - P)(X)$. Operatorul T_0 are un invers continuu pe care-l vom nota cu S_0. Fie, în sfîrșit, $S = S_0 Q$. Atunci vom avea

$$ST = S_0 Q\, T_0(1_X - P) = S_0\, T_0(1_X - P) = 1_X - P$$

și

$$TS = T_0(1_X - P)\, S_0 Q = T_0 S_0 Q = Q = 1_Y - (1_Y - Q),$$

iar operatorii $K_1 = -P$ și $K_2 = Q - 1_Y$ sînt compacți deoarece sînt de rang finit (exemplul 4.1.2.2°), avînd ca imagini spații de dimensiune finită. Demonstrația este completă.

4.5.11. COROLAR. *Fie $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ un operator Fredholm. Atunci oricare ar fi $K \in \mathscr{K}(X, Y)$, operatorul $T + K$ este Fredholm.*

Demonstrație. Afirmația rezultă din aceea că dacă T satisface condițiile teoremei 4.5.10, atunci $T + K$ satisface condițiile acestei teoreme. Lăsăm verificarea acestui fapt simplu pe seama cititorului.

Demonstrăm acum *stabilitatea indexului la perturbații compacte.*

4.5.12. TEOREMĂ. *Fie $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ un operator Fredholm. Atunci, pentru orice $K \in \mathscr{K}(X, Y)$, operatorul $T + K$ este Fredholm și* $\operatorname{ind}(T + K) = \operatorname{ind}(T)$.

Demonstrație. Faptul că $T + K$ este Fredholm rezultă din corolarul precedent. Va trebui deci să arătăm doar că $\operatorname{ind}(T + K) = \operatorname{ind}(T)$. Pentru aceasta vom considera funcția $T(s) = T + sK$, unde $0 \leqslant s \leqslant 1$. În baza corolarului precedent, operatorul $T(s)$ este Fredholm, oricare ar fi s. Deoarece $\| T(s) - T \| \leqslant s \| K \|$, dacă parametrul s este suficient de mic vom avea $\operatorname{ind}(T(s)) = \operatorname{ind}(T)$, în virtutea teoremei 4.5.9. În baza aceleași teoreme, funcția $s \to \operatorname{ind}(T(s))$ este continuă pe intervalul $[0, 1]$. Valorile acestei funcții fiind numere întregi și neexistînd salturi datorită continuității, va trebui să avem egalitatea $\operatorname{ind}(T(s)) = \operatorname{ind}(T)$. În particular, $\operatorname{ind}(T + K) = \operatorname{ind}(T)$, ceea ce încheie demonstrația.

4.5.13. PROPOZIȚIE. *Dacă $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ este un operator Fredholm, atunci $T^* \in \mathscr{L}(Y^*, X^*)$ este un operator Fredholm și* $\operatorname{ind}(T^*) = -\operatorname{ind}(T)$.

Demonstrație. Fie S_1, S_2, K_1, K_2 operatori cu proprietățile din teorema 4.5.10. Atunci $T^* S_1^* = 1_{X^*} + K_1^*$ și $S_2^* T^* = 1_{Y^*} + K_2^*$, unde K_1^*, K_2^* sînt compacți (propoziția 4.1.7). Teorema 4.5.10 ne asigură atunci că operatorul T^* este Fredholm.

Folosind relația (4.4.2), observația 4.4.10 și notația și afirmațiile din exercițiul 4.6.14 și 4.6.17, vom avea

$$N(T^*) = R(T)^\perp \simeq (Y/R(T))^*,$$

$$X^*/R(T^*) = X^*/N(T)^\perp \simeq N(T)^*,$$

unde $\simeq$ înseamnă izomorfism. În particular, $\dim N(T^*) = \dim Y/R(T)$ și $\dim X^*/R(T^*) = \dim N(T)$, fiind spații de dimensiune finită. Așadar, $\operatorname{ind}(T^*) = -\operatorname{ind}(T)$ și demonstrația este completă.

Este adevărată și afirmația inversă, pe care o vom obține în continuare.

4.5.14. PROPOZIȚIE. *Fie* $T \in \mathscr{L}(X, Y)$. *Dacă* T^* *este operator Fredholm, atunci și* T *este operator Fredholm.*

Demonstrație. Vom folosi faptul că spațiile X și Y pot fi privite ca subspații închise în X^{**}, respectiv Y^{**} și că operatorul T^{**} este în acest caz o extensie a operatorului T (exercițiul 4.6.18).

Să arătăm mai întîi că imaginea operatorului T este închisă. Acest lucru se va obține printr-o mică modificare a unei părți din demonstrația teoremei 4.5.10. Anume, presupunînd că $R(T)$ nu este închis, deducem existența unui șir $\{y_k\}_k$ cu $y_k = Tx_k$, astfel încît $y_k \to 0$ $(k \to \infty)$ dar $\| x_k + N(T) \| = 1$. În puls, șirul $\{x_k\}_k$ poate fi presupus mărginit. Operatorul T^* fiind Fredholm, rezultă că și operatorul T^{**} este Fredhom (propoziția 4.5.13); prin urmare, există operatorii $S_1 \in \mathscr{L}(Y^{**}, X^{**})$ și $K_1 \in \mathscr{K}(X^{**})$ astfel încît $S_1 T^{**} = 1_{**} + K_1$, unde 1_{**} este identitatea pe X^{**} (teorema 4.5.10). Atunci, cu identificările menționate la începutul demonstrației, $S_1 y_k = S_1 T^{**} x_k = x_k + K_1 x_k$ pentru orice k. Deoarece $S_1 y_k \to 0$ $(k \to \infty)$ și $\{K_1 x_k\}_k$ are un subșir convergent, șirul $\{x_k\}_k$ va trebui să aibă un subșir convergent. Înlocuind deci pe $\{x_k\}_k$ printr-un subșir al său, putem presupune că $x_k \to x_0 \in X (k \to \infty)$. Ca și în demonstrația teoremei 4.5.10, obținem, pe de o parte, că $x_0 \in N(T)$, iar, pe de altă parte, că $\| x_0 + N(T) \| = 1$. Această contradicție arată că $R(T)$ trebuie să fie subspațiu închis.

Deoarece $X^*/R(T^*)$ și $N(T^*)$ sînt spații de dimensiune finită, din relațiile de dualitate folosite în demonstrația propoziției 4.5.13 obținem și finitudinea spațiilor $N(T)$ și $Y/R(T)$, ceea ce încheie demonstația.

Enunțînd concomitent propozițiile 4.5.13 și 4.5.14, obținem următorul rezultat.

4.5.15. TEOREMĂ. *Un operator* $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ *este Fredholm dacă și numai dacă adjunctul său* T^* *este Fredholm. In acest caz avem egalitatea* $\operatorname{ind}(T^*) = -\operatorname{ind}(T)$.

O consecință importantă a rezultatelor din acest paragraf este ceea ce numim *alternativa lui Fredholm*, utilizată în rezolvarea ecuațiilor integrale. Alternativa lui Fredholm, în forma sa abstractă, se enunță astfel:

4.5.16. PROPOZIȚIE. *Fie* $K \in \mathscr{K}(X)$ *un operator fixat și fie ecuațiile*

$$(1)\ x - Kx = y, \quad (1^*)\ x^* - K^* x^* = y^*,$$

unde $y \in X$ *și* $y^* \in X^*$ *sînt vectori dați iar* $x \in X$ *și* $x^* \in X^*$ *sînt necunoscute. Fie și ecuațiile omogene asociate*

$$(2)\ v - Kv = 0, \quad (2^*)\ v^* - K^* v^* = 0.$$

Atunci sau ecuațiile (1) *și* (1*) *admit soluții unice pentru orice vectori dați* y *și* y^*, *în care caz ecuațiile* (2) *și* (2*) *admit doar soluția trivială, sau ecuațiile omogene admit soluții nenule, numărul soluțiilor liniar independente fiind finit și același pentru ambele ecuații.*

In al doilea caz, o condiție necesară și suficientă pentru ca ecuațiile (1) *și* (1*) *să admită soluții este ca* y *să se afle în nucleul tuturor soluțiilor ecuației* (2*) *și* y^* *să conțină în nucleul său toate soluțiile ecuației* (2).

Demonstrație. Fie T operatorul $1 - K$. În baza teoremei 4.5.12 operatorul T este Fredholm și $\operatorname{ind}(T) = \operatorname{ind}(1) = 0$. În particular, $\dim N(T) = \dim X/R(T)$. Sînt posibile două situații.

(a) Operatorul T este inversabil. Atunci și operatorul T^* este inversabil și ecuațiile (1) și (1*) au soluții unice date de $x = T^{-1}y$ și, respectiv, $x^* = T^{*-1}y^*$. În particular, ecuațiile (2) și (2*) admit numai soluția trivială.

(b) Operatorul T nu este inversabil. Atunci $N(T) \neq \{0\}$. Într-adevăr, dacă $N(T) = \{0\}$, atunci $\dim X/R(T) = 0$, deci $R(T) = X$, adică T ar fi inversabil, contrar ipotezei noastre.

Să remarcăm că

$$\dim N(T^*) = \dim(X/R(T))^* = \dim X/R(T) = \dim N(T)$$

(a se vedea demonstrația propoziției 4.5.13), deci ecuațiile (2) și (2*) au soluții netriviale și numărul de soluții liniar independente este același pentru ambele ecuații.

În sfîrșit, pentru ca (1) și (1*) să aibă soluții este necesar ca $y \in R(T)$ și $y^* \in R(T^*)$, ceea ce este echivalent cu faptul că

$$y \in \{v \in X : y^*(v) = 0,\ y^* \in N(T^*)\}$$

și

$$y^* \in \{v^* \in X^* : v^*(y) = 0,\ y \in N(T)\},$$

pe baza relațiilor (4.4.3) și (4.4.2). Acest fapt nu exprimă altceva decît ultima parte a afirmației noastre. Demonstrația este completă.

Vom încheia acest paragraf menționînd că se poate dezvolta o teorie de acest tip și pentru operatori închiși, nu neapărat mărginiți. O asemenea teorie nu este însă esențial mai generală decît cea prezentată aici, deoarece cazul operatorilor nemărginiți poate fi redus, printr-un anume artificiu, la cazul mărginit (exercițiul 4.6.19).

4.6. EXERCIȚII ȘI COMPLETĂRI

4.6.1. Fie Y un spațiu liniar normat. Vom nota cu $\dim Y$ *dimensiunea algebrică* a spațiului liniar Y peste corpul complex (pentru detalii privind dimensiunea algebrică recomandăm lucrarea [4], cap. III, § 4). Dacă $n = \dim Y < \infty$, este binecunoscut faptul că spațiul Y este izomorf algebric și topologic cu spațiul euclidian $\mathbf{C}^n$ (a se vedea [5], cap. III, teorema 1.2.1).

Fie X un spațiu Banach arbitrar și fie $Y \subset X$ un subspațiu liniar, cu $\dim Y < \infty$. Folosind rezultatul enunțat și faptul că spațiul $\mathbf{C}^n$ este complet, arătați că Y este un subspațiu închis al lui X.

4.6.2. Fie X un spațiu Banach. Arătați că $\dim X < \infty$ dacă și numai dacă orice mulțime mărginită din X este relativ compactă. (Acest rezultat este datorat lui F. Riesz.)

Indicație. După cum s-a menționat la exercițiul precedent, dacă $n = \dim X < \infty$, atunci X este izomorf algebric și topologic cu spațiul $\mathbf{C}^n$ iar compacitatea mulțimilor mărginite și închise se obține în acest caz din lema clasică a lui Cesàro ([12], 6.16).

Reciproc, dacă $\dim X = \infty$, în baza lemei 4.2.5 rezultă că există un șir $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ cu $\|x_k\| = 1$ și $\|x_k - x_m\| \geqslant 1/2$ $(k \neq m)$ pentru orice numere naturale k și m, deci șirul $\{x_k\}_k$ nu poate conține nici un subșir convergent. Șirul $\{x_k\}_k$ se construiește inductiv, folosindu-se faptul că un subspațiu de dimensiune finită este automat închis (exercițiul 4.6.1), condiție cerută pentru aplicarea lemei 4.2.5.

4.6.3. Fie X, Y două spații normate, având fiecare dimensiunea finită. Arătați că orice aplicație liniară $T : X \to Y$ este continuă.

Indicație. Se arată mai întîi că orice aplicație liniară $\varphi : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}$ este continuă. Într-adevăr, dacă $\{e_1, \ldots, e_n\}$ este baza canonică a spațiului $\mathbf{C}^n$ [deci $e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ cu 1 pe poziția j], atunci se vede ușor că $|\varphi(x)| \leqslant M\|x\|$, oricare ar fi $x \in \mathbf{C}^n$, unde

$$M = \sum_{j=1}^{n} |\varphi(e_j)|,$$

deci φ este continuă.

În etapa a doua, dacă $T : \mathbf{C}^m \to \mathbf{C}^n$ este o aplicație liniară, atunci avem reprezentarea

$$Tx = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x) e_j, \quad x \in \mathbf{C}^m,$$

unde $\varphi_j : \mathbf{C}^m \to \mathbf{C}$ sînt aplicații liniare, deci continue în baza primei părți. De aici rezultă că T este aplicație continuă.

În sfîrșit, dacă $T : X \to Y$ este o aplicație liniară iar X și Y sînt spații normate de dimensiune finită, utilizarea izomorfismului menționat în exercițiul 4.6.1 reduce problema continuității lui T la cazul precedent.

4.6.4. Fie X un spațiu normat de dimensiune finită (deci X este complet în baza exercițiului 4.6.1). Arătați că pentru orice $T \in \mathcal{L}(X)$ spectrul $\sigma(T, X)$ este format numai din valori proprii.

Indicație. Fie $\lambda \in \sigma(T, X)$. Dacă operatorul $\lambda - T$ ar fi injectiv, atunci $\dim R(\lambda - T) = \dim X$ (deoarece imaginea unui sistem liniar independent printr-un operator injectiv este tot un sistem liniar independent), deci ar trebui să avem $R(\lambda - T) = X$. Așadar, operatorul $\lambda - T$ ar fi inversabil, ceea ce nu se poate.

4.6.5. Fie Ω un spațiu metric compact. Reamintim că o familie $\mathcal{F} \subset C(\Omega)$ se numește *egal continuă* dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ și orice punct $\omega_0 \in \Omega$ există o vecinătate V_0 a lui ω_0 astfel încît $|f(\omega) - f(\omega_0)| < \varepsilon$, oricare ar fi $\omega \in V_0$ și $f \in \mathcal{F}$.

Arătați că orice familie $\mathcal{F} \subset C(\Omega)$ egal continuă și mărginită este relativ compactă (în legătură cu propoziția 4.1.7).

Indicație. Este suficient să se arate că din orice șir $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ se poate extrage un subșir convergent (teorema 0.1.14). Spațiul Ω fiind metric și compact, există o submulțime numărabilă $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$, densă în Ω. Șirul $\{f_n(\omega_1)\}_n$ fiind mărginit, din el putem extrage un subșir $\{f_{1n}(\omega_1)\}_n$ convergent. Din șirul $\{f_{1n}(\omega_2)\}_n$ extragem apoi subșirul convergent $\{f_{2n}(\omega_2)\}_n$. Procedeul se continuă și ne conduce la un șir de funcții $g_n = f_{nn}$, extras din șirul inițial, convergent în fiecare punct ω_k. Fie $\varepsilon > 0$. Există $\tilde{\omega}_1, \ldots, \tilde{\omega}_p \in \Omega$ și V_j vecinătate a lui $\tilde{\omega}_j$ astfel încît $|f(\omega) - f(\tilde{\omega}_j)| < \varepsilon/5$ dacă $\omega \in V_j$ $(j = 1, \ldots, p)$ pentru orice $f \in \mathcal{F}$. În plus, $V_1 \cup \ldots \cup V_p = \Omega$. Deoarece, din densitate, există $\omega_{n_j} \in V_j$, obținem de aici că există $n(\varepsilon)$ astfel încît $|g_{n+m}(\omega) - g_n(\omega)| < \varepsilon$ dacă $n \geqslant n(\varepsilon)$, $m \geqslant 1$, $\omega \in \Omega$. Așadar, $g_n \to g \in C(\Omega)$ $(n \to \infty)$.

Invers, se poate arăta că o familie $\mathcal{F} \subset C(\Omega)$ relativ compactă este mărginită și egal continuă (rezultat pe care nu-l folosim). Mai mult decît atît, faptul (presupus pentru simplitate) că Ω este spațiu metric nu este esențial. Aceste afirmații formează cunoscutul *criteriu de compacitate* datorat lui Arzelà-Ascoli (pentru detalii trimitem la lucrarea [8], cap. IV, §6).

4.6.6. Fie X un spațiu liniar și fie Y un subspațiu liniar al lui X. Reamintim că *spațiul factor* (sau *spațiul cît*) X/Y este o mulțime ale cărei elemente sînt *clasele de echivalență modulo* Y, adică mulțimile de forma

$$x + Y = \{x + y : y \in Y\}, \quad x \in X,$$

care se poate organiza ca spațiu liniar, cu operații naturale (a se vedea [5], cap. I, § 1.6).

Să presupunem că X este un spațiu Banach și că Y este închis în X. Vom defini mărimea

$$\| x + Y \| = \inf_{y \in Y} \| x + y \| = d(x, Y), \quad x \in X. \tag{4.6.1}$$

1° Arătați că relația (4.6.1) definește o normă pe spațiul factor X/Y.

2° Arătați că spațiul factor X/Y, dotat cu norma (4.6.1), devine spațiu Banach.

Indicație. Fie $\{\xi_k\}_k$ un șir fundamental în norma (4.6.1), format din elemente ale spațiului X/Y. Înlocuind la nevoie șirul $\{\xi_k\}_k$ printr-un subșir al său, vom putea presupune că $\|\xi_{k+1} - \xi_k\| < 2^{-k-2}$ pentru orice k. Vom lua un reprezentant arbitrar $x_1 \in \xi_1$ iar pentru $k \geqslant 1$ vom alege $x_{k+1} \in \xi_{k+1} - \xi_k$ astfel încît $\|x_{k+1}\| < 2^{-k-1}$. Atunci seria $x_1 + x_2 + \ldots + x_k + \ldots$ este absolut convergentă în spațiul X. Fie x suma acestei serii. Definind clasa $\xi = x + Y$, avem $\xi_k \to \xi$ cînd $k \to \infty$, deci spațiul X/Y este complet.

3° Fie $X_0 \subset X$ un subspațiu liniar, închis în X, astfel încît $X_0 \supset Y$. Arătați că X_0/Y este un subspațiu închis în X/Y.

Indicație. Procedînd ca la punctul 2°, dacă $\{\xi_k\}_k$ este un șir din X_0/Y convergent în X/Y, atunci suma seriei $x_1 + x_2 + \ldots$ trebuie să fie un element din X_0, deci limita șirului $\{\xi_k\}_k$ este în X_0/X.

4.6.7. Fie H un spațiu Hilbert și fie $N \in \mathscr{L}(H)$ un operator compact și normal. Fie $\{\lambda_j\}_{j \in J}$ familia cel mult numărabilă de valori proprii distincte, nenule ale lui N (teorema 4.2.10).

Dovediți existența unei familii de proiecții $\{P_j\}_{j \in J} \subset \mathscr{A}(H)$ cu următoarele proprietăți:

1° $N|H_j = \lambda_j$, unde $H_j = P_j(H)$ pentru orice $j \in J$;

2° $P_j P_k = 0$ dacă $j \neq k$;

3° $N = \sum_{j \in J} \lambda_j P_j$,

convergența avînd loc în topologia uniformă a spațiului $\mathscr{L}(H)$;

4° fiecare vector $x \in H$ se poate scrie astfel:

$$x = P_0 x + \sum_{j \in J} P_j x,$$

unde P_0 este proiecția lui H pe nucleul operatorului N.

Aceasta este o variantă a teoremei spectrale (teorema 2.3.6), valabilă pentru operatorii normali care sînt și compacți.

Indicație. Fie E măsura spectrală a lui N și fie P_j proiectorul spectral atașat valorii proprii λ_j (prin corolarul 1.5.3). Argumentul din lema 4.3.2 (în care pozitivitatea nu joacă nici un rol) ne arată că $P_j = E(\{\lambda_j\})$ și că $P_j(H)$ este chiar nucleul operatorului $\lambda_j - N$, oricare ar fi $j \in J$. În particular, au loc afirmațiile 1° și 2°.

Fie apoi $I \subset J$ o familie finită de indici. Se vede ușor că

$$\| \sum_{j \in I} \lambda_j P_j \|^2 \leqslant \sup_{j \in I} |\lambda_j|^2,$$

de unde se poate deduce că seria $\sum_{j \in J} \lambda_j P_j$ este convergentă în topologia lui $\mathscr{L}(H)$ (folosind lema 4.2.6).

Fie $\varepsilon > 0$ și fie $\sigma_\varepsilon = \{\lambda \in \sigma(N, H) : |\lambda| \leqslant \varepsilon\}$. Atunci

$$N = \int_{\sigma(N,H)} \lambda \, dE(\lambda) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{\sigma_\varepsilon} \lambda \, dE(\lambda) + \sum_{\substack{\lambda \in \sigma(N,H) \\ |\lambda| > \varepsilon}} \lambda E(\{\lambda\}) \right) = \sum_{j \in J} \lambda_j P_j,$$

adică afirmația 3°.

Dacă $P_0 = E(\{0\})$, atunci P_0 este proiecția lui H pe nucleul lui N. Într-adevăr, dacă $x = P_0x$, atunci $Nx = NP_0x = 0$, în baza calculului funcțional cu funcții boreliene. Invers, dacă x se află în nucleul lui N, atunci $P_jx = 0$, oricare ar fi $j \in J$ (căci $NP_jx = 0 = \lambda_jP_jx$). Prin urmare, $x = E(\{0\})x$. Reprezentînd mulțimea $\sigma(N, H)$ ca o reuniune cel mult numărabilă de submulțimi disjuncte, formate dintr-un singur punct, obținem și afirmația 4°.

4.6.8. Demonstrați inegalitatea (4.3.5) (*inegalitatea lui Hölder*).

Indicație. Se presupune, mai întîi, că $1/p' + 1/p'' = 1$. Pentru orice numere $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ are loc estimarea

$$ab \leqslant a^{p'}/p' + b^{p''}/p''. \tag{4.6.2}$$

Într-adevăr, considerînd funcția $f(t) = t^{p'}/p' + t^{-p''}/p''$ $(t > 0)$ și observînd că $f'(t) < 0$ dacă $t < 1$, $f'(t) > 0$ dacă $t > 1$ și că $f'(1) = 0$ (f' fiind derivata lui f), deducem că f are un minim în $t = 1$. Scriind că $f(1) = 1 \leqslant f(a^{1/p''}b^{-1/p'})$, obținem inegalitatea (4.6.2).

Se aplică apoi (4.6.2) numerelor

$$a = \alpha_k(\sum_k \alpha_k^{p'})^{-1/p'} \quad , \quad b = \beta_k(\sum_k \beta_k^{p''})^{-1/p''};$$

însumînd după indicele k, se obține (4.3.5) pentru acest caz.

Cazul general se reduce la cel precedent, observîndu-se că $1/(p'/p) + 1/(p''/p) = 1$.

4.6.9. Demonstrați inegalitatea (4.3.6) (*inegalitatea lui Minkovski*).

Indicație. Se poate presupune $p > 1$. Se scrie

$$\sum_k (\alpha_k + \beta_k)^p = \sum_k \alpha_k(\alpha_k + \beta_k)^{p-1} + \sum_k \beta_k(\alpha_k + \beta_k)^{p-1}$$

și se aplică inegalitatea lui Hölder [cu $p' = p$ și $p'' = p/(p-1)$] fiecărei sume din membrul al doilea al acestei egalități.

4.6.10. Demonstrați inegalitățile (4.3.7) și (4.3.8).

Indicație. Inegalitatea (4.3.7) se obține din faptul că $(a + b)^p \leqslant a^p + b^p$ pentru orice $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ și $0 \leqslant p \leqslant 1$.

Pentru inegalitatea (4.3.8), se observă că

$$(\sum_k (\alpha_k^p / \sum_m \alpha_m^p)^{p'/p})^{1/p'} \leqslant (\sum_k \alpha_k^p / \sum_m \alpha_m^p)^{1/p'} = 1.$$

4.6.11. Fie $X = C([0, 1])$ și fie $T \in \mathcal{L}(X)$ definit prin relația

$$(Tf)(s) = \int_0^s f(t)\,dt, \quad f \in X, \quad 0 \leqslant s \leqslant 1. \tag{4.6.3}$$

1° Arătați că operatorul T nu are imagine închisă.

Indicație. Se vede ușor că

$$R(T) = \{f \in X : f' \in X,\ f(0) = 0\}.$$

În plus, $R(T) \subset X_0 = \{f \in X : f(0) = 0\}$ (X_0 este închis în X), $R(T)$ este dens în X_0 (consecință a teoremei de aproximare a lui Weierstrass), dar $R(T) \neq X_0$.

2° Arătați că operatorul T este compact.

Indicație. Fie $\mathcal{S} \subset X$ o familie mărginită. Atunci familia $\mathcal{S}' = T(\mathcal{S})$ este mărginită și egal continuă, deci este relativ compactă (exercițiul 4.6.5).

Operatorul (4.6.3) se mai numește *operatorul Volterra*. Acesta poate fi definit și pe alte spații de funcții, de pildă pe spațiile Banach $L_\mu^p([0, 1], \mu)$ $(1 \leqslant p < \infty)$.

4.6.12. Fie X și Y spații Banach. Un operator $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ se numește *aplicație deschisă* dacă imaginea oricărei mulțimi deschise din X este o mulțime deschisă în Y.

Fie $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ cu $R(T) = Y$. Arătați că T este aplicație deschisă. (Acest rezultat este cunoscut ca *teorema aplicației deschise* și este datorat lui Banach).

Indicație. Dacă $G \subset X$ este deschisă, atunci $G_0 = \{x + N(T) : x \in G\}$ este deschisă în $X/N(T)$. Fie $T_0 : X/N(T) \to Y$ definit ca în corolarul 4.4.2. Atunci T_0 are invers continuu; prin urmare, mulțimea $T(G) = T_0(G_0)$ este deschisă.

4.6.13. Fie X un spațiu Banach și fie X_1, X_2 subspații liniare, închise în X, astfel încît $X = X_1 + X_2$ și $X_1 \cap X_2 = \{0\}$. În particular, fiecare $x \in X$ se scrie în mod unic sub forma $x = x_1 + x_2$ cu $x_1 \in X_1$ și $x_2 \in X_2$. De aici rezultă că aplicația $P_1 x = x_1$ $(x \in X)$ este liniară și satisface ecuația $P_1^2 = P_1$. Cu alte cuvinte, P_1 este o proiecție a lui X pe X_1.

Arătați că P_1 este o proiecție continuă.

Indicație. Se utilizează teorema 0.3.3.

Aplicația P_1 se numește *proiecția* spațiului X pe spațiul X_1 *paralelă* cu spațiul X_2.

4.6.14. Fie X un spațiu Banach de dimensiune finită. Arătați că $\dim X^* = \dim X$.

Indicație. Se aplică lema 4.5.6 spațiului $X_0 = X$. Funcționalele date de această lemă formează o bază a spațiului X^*.

4.6.15. Fie X un spațiu Banach și fie Y un subspațiu liniar și închis al său, astfel încît $n = \dim X/Y < \infty$. Arătați că pentru orice $\varepsilon > 0$ există o proiecție Q a lui X pe Y astfel încît $\|Q\| \leqslant n + 1 + \varepsilon$.

Indicație. Fie sistemele de vectori $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\} \subset X/Y$ și $\{\Phi_1, \ldots, \Phi_n\} \subset (X/Y)^*$ date de lema 4.5.6. În particular, $\xi = \Phi_1(\xi)\xi_1 + \ldots + \Phi_n(\xi)\xi_n$ pentru orice $\xi \in X/Y$. Se aleg vectorii $x_j \in \xi_j$ cu $\|x_j\| \leqslant 1 + \varepsilon/n$ și se definesc funcționalele $\varphi_j(x) = \Phi_j(x + Y)$ $(x \in X;\ j = 1, \ldots, n)$, deci $\varphi_j \in X^*$ și $\|\varphi_j\| \leqslant 1$. Atunci formula

$$Qx = x - \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x)\, x_j, \quad x \in X,$$

definește o proiecție a lui X pe Y cu $\|Q\| \leqslant n + 1 + \varepsilon$.

4.6.16. Vom folosi notația din enunțul și demonstrația teoremei 4.5.9. Fie $Q : Y \to R(T)$ o proiecție cu $\|Q\| \leqslant m + 1 + \varepsilon$, unde $m = \dim Y/R(T)$ și $\varepsilon > 0$ este un număr dat (exercițiul 4.6.15). Este limpede că putem lua $M = (1 - Q)(Y)$ în demonstrația teoremei 4.5.9. Ne propunem să găsim o estimare pentru $\gamma(T_2)$ în funcție de $\gamma(T)$, m și $n = \dim N$. Să remarcăm că putem presupune $\|P\| \leqslant n$ (corolarul 4.5.7.) Să mai fixăm un număr $r > \gamma(T)^{-1}$.

Fie $y \in Y$ arbitrar. Avem $y = y_1 + y_2$, unde $y_1 \in R(T)$ și $y_2 \in M$. Așadar, $\|y_2\| = \|(1 - Q)y\| \leqslant \|1 - Q\|\,\|y\|$.

1° Analizînd indicația de la exercițiul 4.6.15, arătați că $\|1 - Q\| \leqslant m + \varepsilon$.

Să reținem, așadar, că $\|y_2\| \leqslant (m + \varepsilon)\|y\|$.

2° Arătați că există un vector $x_2 \in X_1$ astfel încît $Tx_2 = y_1$ și $\|x_2\| \leqslant r(n + 1)(m + 1 + \varepsilon)\|y\|$. De aici rezultă

$$\|(x_2,\ y_2)\| \leqslant (r^2(n + 1)^2(m + 1 + \varepsilon)^2 + (m + \varepsilon)^2)^{1/2}\, \|y\|.$$

3° Deoarece $T_2((x_2, y_2)) = y$, deduceți din 2° că

$$\gamma(T_2) \geqslant (\gamma(T)^{-2}(n + 1)^2(m + 1)^2 + m^2)^{-1/2}. \tag{4.6.4}$$

În particular, dacă mărimea $\|\tilde{T} - T\|$ este strict mai mică decît membrul drept al relației (4.6.4), atunci pentru $\tilde{T}$ au loc toate afirmațiile teoremei 4.5.9.

4° Dacă X și Y sînt spații Hilbert, arătați că

$$\gamma(T_2) \geqslant \gamma(T)\,(1 + \gamma(T)^2)^{-1/2}.$$

4.6.17. Fie X un spațiu Banach și fie X_0 un subspațiu liniar, închis în X. Vom face notația

$$X_0^{\perp} = \{x^* \in X^* : x^*|X_0 = 0\}.$$

Mulțimea $X_0^{\perp}$ este un subspațiu închis al lui X^* numit *ortogonalul* spațiului X_0.

1° Arătați că dualul spațiului X_0 este izomorf cu spațiul factor $X^*/X_0^\perp$ iar izomorfismul este chiar izometrie.

Indicație. Pentru fiecare $\varphi \in X_0^*$ construim un element $\Phi \in X^*$ astfel încît $\Phi|X_0 = \varphi$ și $\|\Phi\| = \|\varphi\|$ (teorema 0.3.8). Aplicația

$$X_0^* \ni \varphi \to \Phi + X_0^\perp \in X^*/X_0^\perp$$

realizează izomorfismul dorit.

2° Dualul spațiului factor X/X_0 este izomorf cu spațiul $X_0^\perp$ iar izomorfismul este chiar izometrie.

Indicație. Dacă $\Phi \in (X/X_0)^*$, vom defini $\varphi \in X_0^\perp$ prin relația $\varphi(x) = \Phi(x + X_0)$ $(x \in X)$. Atunci aplicația

$$(X/X_0)^* \ni \Phi \to \varphi \in X_0^\perp$$

realizează izomorfismul căutat.

4.6.18. Fie X un spațiu Banach și fie X^{**} *bidualul* lui X [adică $X^{**} = (X^*)^*$]. Vom defini o aplicație $F_X : X \to X^{**}$ prin relația $F_X(x)(x^*) = x^*(x)$, unde $x \in X$ și $x^* \in X^*$.

1° Arătați că aplicația F_X este o izometrie liniară.

2° Fie Y un alt spațiu Banach și fie $T \in \mathscr{L}(X, Y)$. Vom nota cu $T^{**} \in \mathscr{L}(X^{**}, Y^{**})$ operatorul $(T^*)^*$. Arătați atunci egalitatea $T^{**}F_X = F_Y T$.

Aplicația F_X definită mai sus permite identificarea spațiului X cu subspațiul $\{F_X(x) : x \in X\} \subset X^{**}$. În această identificare, operatorul T^{**} apare ca o extensie a operatorului T.

4.6.19. Fie X, Y spații Banach și fie $T \in \mathscr{C}(X, Y)$. Operatorul T se numește *Fredholm* dacă cerințele din definiția 4.5.1 sînt îndeplinite (cerințe ce nu depind de continuitatea lui T). În acest caz putem vorbi și de *indexul* lui T, notat tot prin $\operatorname{ind}(T)$.

Studiul operatorilor Fredholm nemărginiți poate fi redus, într-un anume sens, la studiul operatorilor Fredholm continui, printr-o metodă ce va fi prezentată în cele ce urmează.

Fie $T \in \mathscr{C}(X, Y)$ arbitrar. Vom introduce mărimea

$$\|x\|_T = (\|x\|^2 + \|Tx\|^2)^{1/2}, \quad x \in D(T). \tag{4.6.5}$$

1° Arătați că (4.6.5) definește o normă pe spațiul liniar $D(T)$, care devine astfel spațiu Banach.

Fie X_T spațiul $D(T)$ dotat cu norma (4.6.5). Evident, $T \in \mathscr{L}(X_T, Y)$; în plus, dacă T este Fredholm, atunci el este Fredholm și ca operator continuu de la X_T în Y.

2° Fie $T \in \mathscr{C}(X, Y)$ un operator Fredholm. Arătați că există un număr $\delta > 0$ astfel încît, dacă $\tilde{T} : D(T) \to Y$ este un operator liniar cu proprietatea că

$$\sup_{\|x\|_T \leq 1} \|\tilde{T}x - Tx\| < \delta,$$

atunci $\tilde{T}$ este Fredholm, $\dim N(\tilde{T}) \leq \dim N(T)$, $\dim Y/R(\tilde{T}) \leq \dim Y/R(T)$ și $\operatorname{ind}(\tilde{T}) = \operatorname{ind}(T)$.

3° Fie $T \in \mathscr{C}(X, Y)$ și fie $K \in \mathscr{K}(X, Y)$. Arătați atunci că avem $K|X_T \in \mathscr{K}(X_T, Y)$.

4° Fie $T \in \mathscr{C}(X, Y)$ un operator Fredholm și fie $K \in \mathscr{K}(X, Y)$. Atunci operatorul $T + K$ este Fredholm și $\operatorname{ind}(T + K) = \operatorname{ind}(T)$.

Pentru fiecare operator $T \in \mathscr{C}(X, Y)$, domeniul de definiție $D(T)$ este algebric izomorf cu graficul $G(T) \subset X \times Y$. Norma (4.6.5) induce și o identificare topologică a celor două mulțimi.

4.6.20. Fie X un spațiu Banach și fie $T \in \mathscr{L}(X)$. *Problema subspațiilor invariante* la acțiunea operatorului T înseamnă găsirea acelor subspații liniare și închise $Y \subset X$ cu proprietatea $T(Y) \subset Y$. Sînt, desigur, interesante spațiile invariante Y care sînt *netriviale* (deci $\{0\} \neq Y \neq X$). Această problemă nu are întotdeauna soluție (un exemplu de operator fără subspații invariante netriviale a fost construit de C. J. Read).

În cele ce urmează vom schița demonstrația unui rezultat afirmativ în această direcție, rezultat datorat lui V. Lomonosov (a se vedea [13], pag. 219, pentru detalii).

Fie $T \in \mathscr{K}(X)$, $T \neq 0$, și fie $C_T = \{V \in \mathscr{L}(X) : VT = TV\}$.

1° Arătați că C_T este o subalgebră închisă a algebrei Banach $\mathscr{L}(X)$.

2^0 Fie $N = N(T)$. Atunci $V(N) \subset N$, oricare ar fi $V \in C_T$.

Aşadar, dacă $N \neq \{0\}$, atunci N este subspaţiu invariant netrivial pentru orice $V \in C_T$.

Vom presupune în continuare că $N = \{0\}$, deci că T este injectiv. Fie $x_0 \in X$ un vector cu proprietatea că $\| Tx_0 \| > \| T \|$.

Vom nota cu S_0 mulţimea $\{x \in X : \| x - x_0 \| \leqslant 1\}$.

3^0 Arătaţi că $\inf \{\| Tx \| : x \in S_0\} > 0$.

Fie $K = \overbrace{T(S_0)}$. Deoarece T este compact, mulţimea K este compactă în X. Din 3^0 rezultă că $0 \notin K$. Vom discuta în continuare două posibilităţi:

(a) Există un vector $y_0 \in K$ astfel încît $\| Vy_0 - x_0 \| \geqslant 1$, oricare ar fi $V \in C_T$. Vom considera mulţimea

$$X_0 = \overbrace{\{Vy_0 : V \in C_T\}}.$$

4^0 Demonstraţi că X_0 este un spaţiu invariant netrivial pentru orice $V \in C_T$.

Să admitem apoi că (a) nu are loc. Prin urmare, avem:

(b) Pentru orice $y \in K$ există $V \in C_T$ astfel încît $\| Vy - x_0 \| < 1$.

5^0 Utilizînd compacitatea mulţimii K, dovediţi existenţa unei familii finite de operatori $\{V_j\}_{j=1}^m \subset C_T$ astfel încît pentru orice $y \in K$ să existe un indice j cu proprietatea că $\| V_j y - x_0 \| < 1$.

Vom defini funcţiile

$$g_j(y) = \max \{0,\ 1 - \| T_j y - x_0 \|\},\ f_j(y) = g_j(y) / \left(\sum_{k=1}^{m} g_k(y) \right)^{-1},$$

pentru $y \in K$ şi $j = 1, \ldots, m$, care sînt evident continue. Fie apoi

$$G(y) = \sum_{j=1}^{m} f_j(y) V_j y,\ y \in K.$$

6^0 Demonstraţi incluziunea $G(K) \subset S_0$.

Se consideră apoi aplicaţia $F = G \cdot T$. În baza punctului 6^0, avem $F(S_0) \subset S_0$. Mulţimea $\overbrace{F(S_0)}$ fiind compactă (din cauza compacităţii lui T), ne situăm în condiţiile unei bine cunoscute teoreme de punct fix a lui Schauder (a se vedea, de pildă, [15], propoziţia 3.60), care afirmă existenţa unui punct $v_0 \in S_0$ astfel încît $F(v_0) = v_0$. Definim apoi operatorul

$$T_0 = \sum_{j=1}^{m} f_j(Tv_0) V_j T.$$

7^0 Arătaţi că $T_0 \in \mathfrak{K}(X) \cap C_T$, şi că 1 este valoare proprie a lui T_0. În particular, $N_0 = N(1 - T_0)$ este un subspaţiu invariant netrivial al lui T, avînd dimensiunea finită.

Din 7^0 şi din faptul că T este injectiv, rezultă ca $T | N_0$ are cel puţin o valoare proprie nenulă, pe care o notăm cu λ.

8^0 Arătaţi că $N_\lambda = N(\lambda - T)$ este un subspaţiu invariant netrivial pentru orice $V \in C_T$.

Concluzie. Fiind dat un operator $V \in \mathfrak{L}(X)$ cu proprietatea că $VT = TV$ pentru un anume $T \in \mathfrak{K}(X)$, $T \neq 0$, atunci V are cel puţin un subspaţiu invariant netrivial.

5. APLICAŢII

În acest capitol vom prezenta, în scop ilustrativ, cîteva din numeroasele aplicaţii ale teoriei operatorilor liniari.

5.1. ECUAŢII INTEGRALE

Vom lucra în spaţii de (clase de) funcţii măsurabile (egale aproape peste tot) al căror modul la pătrat este o funcţie integrabilă în raport cu măsura Lebesgue sau pe intervalul $[a, b]$ $(-\infty < a < b < +\infty)$ (în care caz avem spaţiul $L^2([a, b])$) sau pe pătratul $[a, b] \times [a, b]$ (căruia îi corespunde spaţiul $L^2([a, b] \times [a, b])$).

Fie $K \in L^2([a, b] \times [a, b])$ o funcţie fixată. Funcţiei K îi asociem operatorul liniar

$$(T_K h)(s) = \int_a^b K(s, t)\, h(t)\, dt,\ h \in H. \tag{5.1.1}$$

unde $H = L^2([a, b])$. Operatorul T_K va fi numit *operator integral* iar funcţia K va fi numită *nucleul integral* care *generează* operatorul T_K.

Fie

$$\|K\| = \left(\int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2\, ds\, dt\right)^{1/2},$$

deci norma funcţiei K în spaţiul $L^2([a, b] \times [a, b])$.

5.1.1. LEMĂ. *Operatorul* $T_K \in \mathscr{L}(H)$. *Mai precis,* $\|T_K\| \leqslant \|K\|$.

Demonstraţie. Să remarcăm că

$$\int_a^b |K(s, t)\, h(t)|\, dt \leqslant \left(\int_a^b |K(s, t)|^2\, dt\right)^{1/2} \left(\int_a^b |h(t)|^2\, dt\right)^{1/2},$$

în baza inegalităţii lui Schwarz ; prin urmare, integrala (5.1.1) există. Avem apoi

$$\|T_K h\|^2 = \int_a^b \left|\int_a^b K(s, t)\, h(t)\, dt\right|^2 ds \leqslant \|K\|^2 \|h\|^2,$$

în baza teoremei lui Fubini, deci $\|T_K\| \leqslant \|K\|$.

5.1.2. OBSERVAȚIE. Fie funcțiile $f_k(s) = s^k$, $a \leqslant s \leqslant b$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Familia $\{f_k\}_{k>0}$ este un sistem liniar independent în H, deoarece polinoamele nenule au doar un număr finit de zerouri. În plus, spațiul generat de $\{f_k\}_k$ este dens în H. Într-adevăr, în baza teoremei de aproximare a lui Weierstrass, funcțiile continue se pot aproxima uniform pe $[a, b]$ cu polinoame. Dacă $f \in H$ este o funcție ortogonală pe spațiul polinoamelor, atunci f trebuie să fie ortogonală pe spațiul funcțiilor continue, deci f trebuie să fie nulă aproape peste tot, în baza teoremei 0.4.19.

Aplicînd procedeul de ortogonalizare Gram-Schmidt (exercițiul 0.6.9), vom găsi o bază ortogonală $\{e_k\}_{k>0}$ a spațiului H formată tot din polinoame (cum se poate constata ușor, prin inducție).

5.1.3. LEMĂ. *Fie* $e_{jk}(s, t) = e_j(s)\, e_k(t)$, $j, k \geqslant 0$, $s, t \in [a, b]$. *Atunci familia* $\{e_{jk}\}_{j,k>0}$ *este o bază ortonormală a spațiului* $L^2([a, b] \times [a, b])$.

Demonstrație. Să remarcăm că

$$\langle e_{jk}, e_{pq} \rangle = \left(\int_a^b e_j(s)\, \overline{e_p(s)}\, ds \right) \left(\int_a^b e_k(t)\, \overline{e_q(t)}\, dt \right),$$

de unde deducem că $\langle e_{jk}, e_{pl} \rangle = 0$ dacă $(j, k) \neq (p, q)$ și $\langle e_{jk}, e_{jk} \rangle = 1$ Așadar, $\{e_{jk}\}_{j,k>0}$ este sistem ortonormal.

Fie acum $F \in L^2([a, b)] \times [a, b])$ astfel încît $\langle F, e_{jk} \rangle = 0$ pentru orice pereche (j, k). Atunci funcția F este ortogonală pe orice polinom în variabilele s și t pe $[a, b] \times [a, b]$, deoarece un asemenea polinom este combinație liniară de polinoame din familia $\{e_{jk}\}_{j,k}$. De aici rezultă că F este ortogonală pe orice funcție continuă pe $[a, b] \times [a, b]$, în virtutea teoremei 0.5.9. În sfîrșit, teorema 0.4.19 ne spune atunci că F trebuie să fie nulă aproape peste tot. Aceasta ne arată că subspațiul generat de sistemul ortonormal $\{e_{jk}\}_{j,k>0}$ trebuie să coincidă cu întreg spațiul $L^2([a,b] \times [a, b])$.

5.1.4. LEMĂ. *Operatorul* T_K *este compact.*

Demonstrație. Fie $\{e_{jk}\}_{j,k>0}$ baza ortonormală obținută în lema 5.1.3. Atunci avem reprezentarea

$$K = \sum_{j,k=0}^{\infty} \langle K, e_{jk} \rangle\, e_{jk},$$

dată de teorema 0.2.11. Să definim funcția

$$K_n = \sum_{j,k=0}^{n} \langle K, e_{jk} \rangle\, e_{jk} \in L^2([a, b)] \times [a, b])$$

și fie T_n operatorul integral generat de nucleul integral $K_n (n = 0, 1, 2, \ldots)$. Fiind operator de rang finit, operatorul T_n este compact. Pe baza lemei 5.1.1 avem

$$\| T_K - T_n \| \leqslant \| K - K_n \| \to 0 \ (n \to \infty),$$

ceea ce asigură compacitatea operatorului T_K, în baza propoziției 4.1.5.

5.1.5. LEMĂ. *Fie* $K \in L^2([a, b] \times [a, b)]$ *şi fie* $K_*(s, t) = \overline{K(t, s)}$, $s, t \in [a, b]$. *Atunci operatorul integral generat de nucleul integral* K_* *este chiar operatorul* T_K^*.

Demonstraţie. Să remarcăm că pentru orice $f, g \in H$ avem

$$\langle T_K, f, g\rangle = \int_a^b \left(\int_a^b K(s, t) f(t)\, dt\, \overline{g(s)}\, ds \right) = \int_a^b f(t) \left(\int_a^b \overline{K(s, t)}\, g(s)\, ds \right) dt,$$

în baza teoremei lui Fubini; prin urmare

$$(T_K^* g)(s) = \int_a^b K_*(s, t)\ g(t)\ dt,\ g \in H.$$

Vom trece acum la enunţarea şi demonstrarea unor rezultate privind ecuaţiile integrale de un anume tip. Vom începe cu o variantă a alternativei lui Fredholm :

5.1.6. TEOREMĂ. *Fie* $K \in L^2([a, b] \times [a, b)]$, *fie* $K_*(s, t) = \overline{K(t,s)}$ $(s, t \in [a, b])$ *şi fie* T_K, S_{K_*} *operatorii integrali generaţi de nucleele integrale* K, *respectiv* K_*. *Să considerăm ecuaţiile integrale*

$$(1) \qquad h - \mu T_K h = f,\ (1^*)\ h_* - \overline{\mu} T_{K_*} h_* = f_*,$$

unde $f, f_* \in H$ *sînt funcţii date,* $\mu \neq 0$ *este un parametru complex iar* h, h_* *sînt necunoscute. Fie şi ecuaţiile omogene asociate*

$$(2) \qquad h - \mu T_K h = 0,\ \ (2^*)\ h_* - \overline{\mu} T_{K_*} h_* = 0.$$

Există atunci un şir de numere complexe $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ *astfel încît* $|\mu_k| \to \infty$ $(k \to \infty)$, *cu următoarele proprietăţi :*

(a) *Dacă* $\mu \notin \{\mu_k\}_k$, *ecuaţiile* (1) *şi* (1*) *admit soluţii unice oricare ar fi* $f, f_* \in H$. *În particular, ecuaţiile* (2) *şi* (2*) *admit numai soluţia trivială.*

(b) *Dacă* $\mu = \mu_k$ *pentru un anume* k, *ecuaţiile* (2) *şi* (2*) *admit soluţii netriviale, numărul soluţiilor liniar independente fiind finit şi acelaşi pentru ambele ecuaţii. În acest caz, o condiţie necesară şi suficientă pentru ca* (1) *şi* (1*) *să aibă soluţii este ca* f *să fie ortogonală pe soluţiile ecuaţiei* (2*) *şi ca* f_* *să fie ortogonală pe soluţiile ecuaţiei* (2).

Demonstraţie. Afirmaţiile rezultă din alternativa lui Fredholm (propoziţia 4.5.16), cu mici modificări datorate faptului că T_{K_*} este adjunctul operatorului T_K în sensul spaţiilor Hilbert (lema 5.1.5). Vom defini $\mu_K = \lambda_k^{-1}$, unde $\lambda_k \in \sigma(T_K, H) \setminus \{0\}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ sînt valorile proprii ale operatorului compact T_K (teorema 4.2.10). În particular, $|\mu_k| \to \infty$ $(k \to \infty)$. Dacă $\mu \notin \{\mu_k\}_k$, atunci operatorul $1 - \mu T_K$ (deci şi operatorul $1 - \overline{\mu} T_{K_*}$) este inversabil şi avem afirmaţia (a). Dacă $\mu = \mu_k$ pentru un anume k, atunci avem afirmaţia (b) ca în demonstraţia propoziţiei 4.5.16.

În cazul operatorilor integrali autoadjuncţi, soluţiile ecuaţiilor integrale de tipul considerat în teorema precedentă pot fi date într-o formă mai explicită.

5.1.7. **TEOREMĂ.** *Fie* $K \in L^2([a, b] \times [a, b])$ *astfel încît* $K_* = K$ *şi fie* T_K *operatorul integral generat de nucleul integral* K. *Să considerăm ecuaţia integrală*

(i) $h - \mu T_K h = f,$

unde $f \in H$ *este o funcţie dată iar* $\mu \neq 0$ *este un parametru complex. Există atunci un şir de numere reale* $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ *cu* $|\mu_k| \to \infty$ $(k \to \infty)$ *şi un şir de proiecţii* $\{P_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathscr{A}(H)$, *cu următoarele proprietăţi:*

(a) *Dacă* $\mu \notin \{\mu_k\}_k$, *atunci ecuaţia* (i) *are soluţie unică oricare ar fi* $f \in H$. *Această soluţie se poate reprezenta sub forma seriei convergente*

$$h = f + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\mu_k - \mu)^{-1} P_k f.$$

(b) *Dacă* $\mu = \mu_k$ *pentru un anume* k, *ecuaţia* (i) *are soluţie dacă şi numai dacă funcţia* f *este ortogonală pe nucleul operatorului* $1 - \mu_k T_k$. *În acest caz, soluţia generală a ecuaţiei* (i) *se poate scrie sub forma seriei convergente*

$$h = f + \sum_{m \neq k} \mu_k(\mu_m - \mu_k)^{-1} P_m f + v,$$

unde v *este o funcţie arbitrară din* $N(1 - \mu_k T_K)$.

Demonstraţie. Deoarece $K = K_*$, operatorul T_K este autoadjunct. Ca şi în teorema precedentă, definim $\mu_k = \lambda_k^{-1}$, unde $\lambda_k \in \sigma(T_K, H) \setminus \{0\}$ sînt, în acest caz, numere reale. Fie P_k proiecţia spaţiului H pe $N(\lambda_k - T_K) = N(1 - \mu_k T_K)$. Atunci, ca în exerciţiul 4.6.7, dacă $\mu \notin \{\mu_k\}_k$, putem scrie

$$(1 - \mu T)^{-1} f = \left(\int_{\sigma(T_K, H)} (1 - \mu\lambda)^{-1} \mathrm{d}E(\lambda) \right) f = E(\{0\}) f + \sum_{k=1}^{\infty} (1 - \mu\lambda_k)^{-1} P_k f =$$

$$= f + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\mu_k - \mu)^{-1} P_k f,$$

în care E este măsura spectrală a operatorului T_K, ceea ce demonstrează punctul (a).

Să presupunem acum că $\mu = \mu_k$ pentru un anume k. Atunci ecuaţia (i) are soluţie dacă şi numai dacă funcţia f este ortogonală pe nucleul operatorului $(1 - \mu_k T_K)^* = 1 - \mu_k T_K$, în baza teoremei 5.1.6 (b).

Să presupunem deci că $f \in H_k = (1 - P_k)(H)$. Deoarece $T_K(H_k) \subset H_k$, operatorul $T_K | H_k \in \mathscr{L}(H_k)$ rămîne (compact şi) autoadjunct iar spectrul său va fi egal cu mulţimea $\sigma(T_K, H) \setminus \{\lambda_k\}$, în virtutea teoremei 1.5.2. În plus, măsura spectrală a operatorului $T_K | H_k$ va fi dată de aplicaţia Bor $(\mathbf{R}) \ni S \to E(S) | H_k$ (ceea ce se vede uşor, folosindu-se unicitatea măsurii spectrale.) Din prima parte a demonstraţiei, obţinem

$$(1_k - \mu_k T_K | H_k)^{-1} f = f + \sum_{m \neq k} \mu_k(\mu_m - \mu_k)^{-1} P_m f,$$

unde 1_k este identitatea pe H_k, ceea ce ne conduce la componenta din spaţiul H_k a oricărui soluţii a ecuaţiei (i). Dacă la această componentă adăugăm un vector arbitrar din $H_k^{\perp} = N(1 - \mu_k T_K)$, obţinem soluţia generală a ecuaţiei (i), ceea ce completează demonstraţia punctului (b) al teoremei.

Pentru alte proprietăți ale operatorilor integrali de tipul consierat în acest paragraf se poate consulta lucrarea [9].

5.2. OPERATORI STURM-LIOUVILLE

Ca și în paragraful precedent, vom lucra cu funcții definite în intervalul compact $[a, b] \subset \mathbf{R}$. Vom nota cu $A^2([a, b])$ spațiul funcțiilor scalare f care au derivată f' absolut continuă pe $[a, b]$, deci pentru care derivata secundă f'' este definită aproape peste tot și este o funcție integrabilă în raport cu măsura Lebesgue pe $[a, b]$ (a se vedea [12] pentru detalii). Mai notăm cu $L^1([a, b])$ spațiul claselor de funcții măsurabile, egale aproape peste tot, care sînt integrabile în raport cu măsura Lebesgue pe $[a, b]$.

Vom considera operatori diferențiali de forma

$$\tau y = (py')' + qy, \quad y \in A^2([a, b)], \tag{5.2.1}$$

în care funcțiile p, p', q sînt continue pe $[a, b]$, au valori reale și $p(s) \neq 0$ pentru orice $s \in [a, b]$.

Operatorii de forma (5.2.1) sînt adesea numiți operatori Sturm-Liouville [8]. Vom folosi această denumire într-un cadru mai restrîns (ca în [9]).

5.2.1 TEOREMĂ. *Fie $f \in L^1([a, b])$, fie $s_0 \in [a, b]$ și fie constantele complexe c_0 și c_1. Există atunci o funcție unic determinată $g \in A^2$ $([a, b])$ astfel încît $\tau g = f$, $g(s_0) = c_0$ și $g'(s_0) = c_1$.*

Demonstrație. Vom înlocui ecuația $\tau g = f$ cu sistemul de ecuații

$$\begin{aligned} g_0' &= g_1, \\ g_1' + p^{-1}(p'g_1 + qg_0) &= p^{-1}f, \end{aligned} \tag{5.2.2}$$

unde $p^{-1}(s) = p(s)^{-1}$ $(s \in [a, b])$. Este limpede că aplicația $g \to (g, g')$ stabilește o corespondență biunivocă între soluțiile ecuației $\tau g = f$ și soluțiile sistemului (5.2.2). Va fi deci suficient să rezolvăm sistemul (5.2.2). Este convenabil să lucrăm cu funcții avînd valori în $\mathbf{C}^2$, deci cu perechi de funcții. Notînd $G(s) = (g_0(s), g_1(s))$ și $F(s) = (0, p(s)^{-1}f(s))$, sistemul (5.2.2) se scrie sub forma

$$G'(s) + A(s)G(s) = F(s),$$

unde

$$A(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p(s)^{-1}q(s) & p(s)^{-1}p'(s) \end{pmatrix}.$$

Condiția $g(s_0) = c_0$, $g'(s_0) = c_1$ devine $G(s_0) = C$, unde $C = (c_0, c_1)$. Vom scrie sistemul (5.2.2) împreună cu această condiție sub forma ecuației integrale

$$G(s) + \int_{s_0}^{s} A(t)G(t)\ \mathrm{d}t = \Phi(s), \tag{5.2.3}$$

unde

$$\Phi(s) = C + \int_{s_0}^{s} F(t)\, dt.$$

Vom considera produsul cartezian $X = L^1([a, b]) \times L^1([a, b])$ și al perechilor de funcții integrabile $V(s) = (v_0(s)\ v_1(s))$, pe care vom defini operatorul

$$(T_A V)(s) = \int_{s_0}^{s} A(t)\ V(t)\, dt.$$

Ecuația (5.2.3) devine atunci $(1 + T_A)G = \Phi$, pretîndu-se acum la o rezolvare prin metode de teoria operatorilor. Într-adevăr, admiţînd că avem estimarea

$$\|(T_A^n V)(s)\| \leqslant ((n-1)!)^{-1} M^n |s - s_0|^{n-1} \int_a^b \|V(t)\|\, dt$$

pentru un anume întreg $n \geqslant 1$, unde $M = \sup\{\|A(s)\| : a \leqslant s \leqslant b\}$, deducem

$$\|(T_A^{n+1} V)(s)\| = \left\| \int_{s_0}^{s} A(t)(T_A^n V)(t)\, dt \right\| \leqslant$$

$$\leqslant ((n-1)!)^{-1} M^n \left(\int_{s_0}^{s} \|A(t)\|\, |t - s_0|^{n-1}\, dt \right) \left(\int_a^b \|V(t)\|\, dt \right) \leqslant$$

$$\leqslant (n!)^{-1} M^{n+1} |s - s_0|^n \int_a^b \|V(t)\|\, dt,$$

ceea ce atestă valabilitatea estimării pentru orice întreg $n \geqslant 1$. De aici obţinem

$$\int_a^b \|(T_A^n V)(s)\|\, ds \leqslant ((n-1)!)^{-1} M^n \left(\int_a^b \|V(t)\|\, dt \right) \left(\int_a^b |s - s_0|^{n-1}\, ds \right) \leqslant$$

$$\leqslant (n!)^{-1} M_1^n \int_a^b \|(V(t)\|\, dt,$$

unde $M_1 = M(b - a)$; prin urmare, $T_A \in \mathscr{L}(X)$ și $\|T_A^n\| \leqslant (n!)^{-1} M_1^n$. Aşadar, seria

$$1 - T_A + T_A^2 - \ldots + (-1)^n T_A^n + \ldots$$

este absolut convergentă în $\mathscr{L}(X)$ și definește inversul operatorului $1 + T_A$. Obținem deci soluția unică a ecuației (5.2.3), anume

$$G = (1 + T_A)^{-1}\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n T_A^n \Phi,$$

ceea ce încheie demonstrația.

5.2.2. OBSERVAȚII. 1° Dacă $f \in L^1([a, b])$ are valori reale și c_0, $c_1 \in \mathbf{R}$, atunci soluția g a ecuației $\tau g = f$ care satisface condițiile $g(s_0) = c_0$ și $g'(s_0) = c_1$ este o funcție cu valori reale. Într-adevăr, în construcția (efectivă) făcută în demonstrația teoremei precedente nu apar, în acest caz, valori complexe.

2° Dacă f este o funcție continuă, atunci derivata a doua g'' a soluției ecuației $\tau g = f$ dată de teorema precedentă este o funcție continuă. Într-adevăr, avem aproape peste tot egalitatea

$$g'' = p^{-1}(f - p'g' - qg)$$

iar funcția din membrul al doilea este continuă, de unde rezultă ușor că derivata funcției g' trebuie să fie continuă.

3° Dacă $g \in N(\tau)$, atunci g'' este funcție continuă. Afirmația rezultă din punctul precedent.

4° Avem $\dim N(\tau) = 2$. Într-adevăr, pentru orice pereche $(c_0, c_1) \in \mathbf{C}^2$ există o funcție unic determinată $g \in A^2([a, b])$ astfel încît $\tau g = 0$, $g(s_0) = c_0$, $g'(s_0) = c_1$. Avem deci un izomorfism între mulțimea soluțiilor ecuației $\tau g = 0$ și spațiul $\mathbf{C}^2$.

5° Dacă μ este un număr complex, din punctul precedent rezultă că în spațiul $N(\tau - \mu)$ există două și numai două funcții liniar independente.

În continuare vom studia operatori de forma (5.2.1) în spațiul Hilbert $L^2([a, b])$. Fie $H^2([a, b])$ spațiul funcțiilor f având derivată f' absolut continuă, pentru care derivata secundă f'' este în spațiul $L^2([a, b])$. Evident, $H^2([a, b]) \subset A^2([a, b])$.

5.2.3. DEFINIȚII. Un *sistem Sturm-Liouville* este o ecuație de forma $\tau y = f$, unde τ este un operator diferențial de tipul (5.2.1) iar $f \in L^2([a,b])$, împreună cu condițiile la limită

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \qquad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \tag{5.2.4}$$

unde α_1, α_2, β_1, β_2 sînt numere reale cu $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$, $\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$.

Definim apoi *operatorul Sturm-Liouville* asociat condițiilor la limită (5.2.4) ca fiind restricția L a operatorului τ la subspațiul $D(L) \subset H^2([a,b])$ format din acele funcții care satisfac (5.2.4).

5.2.4. OBSERVAȚII. 1° Pentru cele ce urmează va fi esențial ca operatorul Sturm-Liouville asociat condițiilor la limită (5.2.4) să fie injectiv. Se poate vedea că pentru suficient de multe alegeri ale constantelor $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ operatorul L este injectiv. Într-adevăr, dacă h_1, h_2 sînt soluții liniar independente ale ecuației $\tau y = 0$, atunci orice $g \in N(L)$ se poate pune sub forma $g = \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2$ (observația 5.2.2.4°). Scriind faptul că g satis-

face (5.2.4), din sistemul de ecuații liniare în λ_1 și λ_2 astfel obținut, regula lui Cramer ne dă o condiție care să implice $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, deci $g = 0$.

Vom face de aici înainte ipoteza că operatorul L este injectiv

2^0 Teorema 5.2.1 ne permite să alegem două soluții nenule g_1 și g_2 ale ecuației $\tau y = 0$ astfel încît $\alpha_1 g_1(a) + \alpha_2 g_1'(a) = 0$ și $\beta_1 g_2(b) + \beta_2 g_2'(b) = 0$. În plus, funcțiile g_1, g_2 sînt reale iar g_1'', g_2'' sînt continue (observațiile 5.2.2.1^0 și 3^0). Să remarcăm apoi că g_1 și g_2 sînt liniar independente. Într-adevăr, dacă de pildă am avea $g_1 = \lambda g_2$, atunci g_1 ar satisface ambele condiții de la (5.2.4), deci am avea $g_1 = g_2 = 0$, deoarece L este presupus injectiv, ceea ce nu se poate.

Să considerăm funcția

$$W(s) = g_1(s)g_2'(s) - g_1'(s)g_2(s), \quad s \in [a, b],$$

funcție care poartă numele de *wronskianul* perechi de soluții g_1, g_2. Să remarcăm că $W(s) \neq 0$ pentru orice $s \in [a, b]$. Acest lucru rezultă din faptul că perechile de numere $(g_1(s), g_1'(s))$ și $(g_2(s), g_2'(s))$ formează o bază a spațiului $\mathbf{C}^2$ pentru fiecare $s \in [a, b]$ (observație 5.2.2.4^0).

3^0 Dacă W este funcția definită la punctul precedent, atunci produsul pW este o funcție constantă. Într-adevăr,

$$(pW)' = p'g_1g_2' + pg_1g_2'' - p'g_1'g_2 - pg_1''g_2 =$$

$$= p'g_1g_2' + g_1(-p'g_2' - qg_2) - p'g_1'g_2 + g_2(p'g_1' + qg_1) = 0.$$

Așadar, pW este o funcție constantă (reală). Vom nota cu $c = (pW)^{-1}$ și vom defini funcția

$$G(s, t) = \begin{cases} cg_1(t)g_2(s), & a \leqslant t \leqslant s, \\ cg_1(s)g_2(t), & s \leqslant t \leqslant b. \end{cases} \tag{5.2.5}$$

Funcția G este numită *funcția Green* asociată operatorului Sturm-Liouville L. Cu ajutorul funcției G definim operatorul integral

$$(T_G f)(s) = \int_a^b G(s, t) f(t)\, dt, \quad f \in L^2([a, b]).$$

Rezultatul care urmează ne arată că operatorul Sturm-Liouville este un operator cu rezolvantă compactă (în sensul propoziției 4.2.11).

5.2.5. TEOREMĂ. *Fie L un operator Sturm-Liouville asociat condițiilor la limită* (5.2.4). *Vom presupune că L este injectiv și vom construi operatorul integral T_G prin relația* (5.2.6). *Atunci operatorul T_G este compact, autoadjunct și satisface relațiile $LT_G = 1$ pe $L^2([a, b])$ și $T_G Lg = g$ pentru orice $g \in D(L)$. În particular, spectrul operatorului L este format dintr-o familie numărabilă $\{\mu_k\}_k$ de valori proprii izolate cu proprietatea că $|\mu_k| \to \infty$ $(k \to \infty)$ și dim $N(\mu_k - L) = 1$, oricare ar fi k.*

Demonstrație. Funcția G, dată de (5.2.5), este reală și satisface relația $G(s, t) = G(t, s)$; prin urmare, operatorul T_G este compact (lema 5.1.4) și autoadjunct (lema 5.1.5). Vom demonstra acum că pentru orice $f \in L^2([a, b])$ funcția $g = T_G f$ este în $D(L)$ și $Lg = f$. Într-adevăr, funcția g se scrie ca

$$g(s) = g_1(s)h_2(s) + g_2(s)h_1(s),$$

unde

$$h_1(s) = c\int_a^s g_1(t)\,f(t)\,dt, \quad h_2(s) = c\int_s g_2(t)f(t)\,dt.$$

Funcţia g fiind absolut continuă, vom avea aproape peste tot egalitatea

$$g'(s) = g_1'(s)h_2(s) - cg_1(s)g_2(s)f(s) + g_2'(s)h_1(s) + cg_1(s)\,g_2(s)\,f(s) = \\ = g_1'(s)h_2(s) + g_2'(s)h_1(s).$$

Deoarece funcţia $g_1'h_2 + g_2'h_1$ este (absolut) continuă pe $[a, b]$, se vede uşor că g trebuie să aibă derivată continuă. Mai mult, g' are derivată aproape peste tot, şi egalitatea

$$g''(s) = g_1''(s)h_2(s) - cg_1'(s)g_2(s)f(s) + g_2''(s)h_1(s) + cg_1(s)g_2'(s)f(s)$$

(care are loc aproape peste tot) ne arată că $g'' \in L^2([a, b])$. Aşadar, $g \in H^2([a, b])$.

Să remarcăm în continuare că

$$\alpha_1 g(a) + \alpha_2 g'(a) = (\alpha_1 g_1(a) + \alpha_2 g_1'(a))h_2(a) + \\ + (\alpha_1 g_2(a) + \alpha_2 g_2'(a))h_1(a) = 0.$$

Asemănător, $\beta_1 g(b) + \beta_2 g'(b) = 0$, prin urmare $g \in D(L)$.
Vom arăta apoi că $Lg = f$. Într-adevăr,

$$(pg')' = (pg_1'h_2 + pg_2'h_1)' = (pg_1')'h_2 + (pg_2')'h_1 + \\ + pc(g_1g_2' - g_1'g_2)f = -gg_1h_2 - qg_2h_1 + f = -qg + f$$

aproape peste tot, datorită definiţiei constantei c şi proprietăţilor funcţiilor g_1 şi g_2 (observaţiile 5.2.4.2⁰) şi 3⁰). De aici deducem că $Lg = f$.

Invers, dacă $g \in D(L)$, aplicînd raţionamentul precedent funcţiei Lg, obţinem egalitatea $ET_GLg = Lg$, de unde $T_GLg = g$, în virtutea injectivităţii operatorului L.

Propoziţia 4.2.11 ne spune că operatorul L are rezolvantă compactă, deci spectrul său este format dintr-o familie numărabilă $\{\mu_k\}_k$ de valori proprii izolate, astfel încît $|\mu_k| \to \infty (k \to \infty)$. În plus, multiplicitatea fiecărei valori proprii este finită. Aici putem da o afirmaţie mai precisă, folosind observaţia 5.2.2.5⁰. Într-adevăr, să presupunem că ar exista două soluţii liniar independente u_1 şi u_2 în $D(L)$, care ar satisface ecuaţia $(\tau - \mu_k)y = 0$. Atunci orice altă soluţie a acestei ecuaţii ar trebui să fie combinaţie liniară a acestor două soluţii, deci, în particular, să verifice condiţiile la limită (5.2.4). În baza teoremei 5.2.1, există însă soluţii ale ecuaţiei $(\tau - \mu_k)y = 0$ care pot fi alese astfel încît să nu satisfacă una din condiţiile (5.2.4). Contradicţia obţinută ne arată că $\dim N(\mu_k - L) = 1$, ceea ce încheie demonstraţia teoremei.

O tratare mai completă a problemelor de acest tip, incluzînd operatori diferenţiali de ordin arbitrar ai căror coeficienţi pot avea unele singularităţi, poate fi găsită în [8], cap. XIII.

5.3. OPERATORI DE UNDĂ

Operatorii de undă, formalizați într-o primă variantă de către C. Møller, sînt obiecte de bază în teoria difuziei. În cuprinsul acestui paragraf vom defini aceste obiecte și vom prezenta cîteva proprietăți elementare ale lor.

Fie H un spațiu Hilbert. Pentru orice operator autoadjunct $A \in \mathscr{C}(H)$ vom nota cu $E_A : \mathrm{Bor}(\mathbf{R}) \to \mathscr{A}(H)$ măsura sa spectrală.

5.3.1. DEFINIȚII. Fie $A \in \mathscr{C}(H)$ un operator autoadjunct. Pentru orice $x \in H$ vom nota cu μ_x^A măsura pozitivă definită prin relația $\mu_x^A(S) = \langle E_A(S)x, x\rangle$ $[S \in \mathrm{Bor}(\mathbf{R})]$.

Un vector $x \in H$ se numește *absolut continuu* în raport cu A dacă măsura μ_x^A este absolut continuă în raport cu măsura Lebesgue pe dreapta reală. Cu alte cuvinte, pentru orice submulțime $S \in \mathrm{Bor}(\mathbf{R})$ de măsură Lebesgue nulă avem $\mu_x^A(S) = 0$.

Vom nota cu H_A mulțimea vectorilor din H care sînt absolut continui în raport cu A.

5.3.2. LEMĂ. *Mulțimea H_A este un subspațiu liniar, închis în H.*

Demonstrație. Pentru orice $\lambda \in \mathbf{C}$ și $x \in H$ avem egalitatea $\mu_{\lambda x}^A = |\lambda|^2 \mu_x^A$. Deci, dacă $x \in H_A$, atunci $\lambda x \in H_A$.

Să remarcăm apoi că pentru orice $x, y \in H$ și $S \in \mathrm{Bor}(\mathbf{R})$ avem

$$\mu_{x+y}^A(S) = \mu_x^A(S) + \mu_y^A(S) + 2\,\mathrm{Re}\langle E(S)x, y\rangle \leqslant$$
$$\leqslant \mu_x^A(S) + \mu_y^A(S) + 2\mu_x^A(S)^{1/2}\|y\|.$$

De aici rezultă că dacă $x, y \in H_A$, atunci $x + y \in H_A$.

În sfîrșit, dacă $\{x_k\}_k \subset H_A$ este un șir convergent către un vector $x \in H$ și dacă $S \in \mathrm{Bor}(\mathbf{R})$ este o submulțime de măsură Lebesgue nulă, atunci

$$\mu_x^A(S) = \lim_{k\to\infty} \langle E_A(S)x_k, x_k\rangle = 0,$$

prin urmare $x \in H_A$.

5.3.3. DEFINIȚIE. Spațiul H_A se numește *spațiul absolut continuu* al operatorului autoadjunct A.

Vom nota cu P_A proiectia lui H pe subspațiul H_A.

5.3.4. LEMĂ. *Fie $A, B \in \mathscr{C}(H)$ operatori autoadjuncți, fie $\mu \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ și fie $T \in \mathscr{L}(H)$ astfel încît $(\mu - A)^{-1}T = T(\mu - B)^{-1}$. Atunci $T(H_B) \subset H_A$.*

Demonstrație. Operatorii $N_A = (\mu - A)^{-1}$ și $N_B = (\mu - B)^{-1}$ fiind normali, în baza teoremei 2.4.1 avem $f(N_A)T = Tf(N_B)$, oricare ar fi funcția continuă f definită pe $\sigma(N_A, H) \cup \sigma(N_B, H)$. Utilizînd egalitatea $\langle f(N_A)\,Tx, y\rangle = \langle Tf(N_B)x, y\rangle$ pentru orice $x, y \in H$ precum și un argument din demonstrația lemei 3.8.1 (lăsăm detaliile pe seama cititorului), deducem că $\widetilde{E}_A(S)T = T\widetilde{E}_B(S)$ oricare ar fi $S \in \mathrm{Bor}(\mathbf{C})$, unde $\widetilde{E}_A$, $\widetilde{E}_B$ sînt măsurile spectrale ale lui N_A, respectiv N_B. Deoarece măsurile $\widetilde{E}_A$ și $\widetilde{E}_B$ se obțin din măsurile E_A, respectiv E_B (propoziția 3.2.5), este clar că trebuie să avem $E_A(S)T = TE_B(S)$, oricare ar fi $S \in \mathrm{Bor}(\mathbf{R})$.

Fie acum $y \in R(T)$, deci $y = Tx$ pentru un $x \in H$. Atunci

$$\mu_y^A(S) = \langle E_A(S)Tx, Tx\rangle = \langle TE_B(S)x, Tx\rangle \leqslant \|T^*Tx\|\,\mu_x^B(S)^{1/2},$$

oricare ar fi $S \in \mathrm{Bor}(\mathbf{R})$. În particular, dacă $x \in H_B$, relația obținută ne arată că $y = Tx \in H_A$, adică afirmația noastră.

Sîntem acum în măsură să definim obiectele de bază ale acestui paragraf.

5.3.5. DEFINIȚII. Fie A, $B \in \mathcal{C}(H)$ operatori autoadjuncți. Vom spune că *operatorii de undă* $W^{\pm}(A, B)$ există, dacă limitele

$$W^{\pm}(A, B)x = \lim_{t \to \mp\infty} e^{itA} e^{-itB} P_B x \tag{5.3.1}$$

există, oricare ar fi $x \in H$ (a se vedea și exercițiul 3.9.4).

Cînd operatorii de undă $W^{\pm} = W^{\pm}(A, B)$ există, definim spațiile $H_+ = R(W^+)$ și $H_- = R(W^-)$.

Convenția potrivit căreia operatorii $W^{\pm}$ corespund lui $t \to \mp\infty$ este preluată din fizică.

Motivul pentru care apare proiecția P_B în formula (5.3.1) este legat de problema existenței operatorilor $W^{\pm}$. Anume, există exemple simple (a se vedea [14], vol. III, exercițiul 15) care arată că limita din (5.3.1) există fără ca limita corespunzătoare, care se obține înlocuind P_B cu identitatea, să existe.

5.3.6. PROPOZIȚIE. *Să presupunem că operatorii* $W^{\pm} = W^{\pm}(A, B)$ *există. Atunci au loc afirmațiile:*

(1) $W^{\pm}$ *sînt izometrii parțiale cu spațiul inițial* H_B *și cu spațiile finale* $H_{\pm}$.

(2) *Spațiile* $H_{\pm}$ *sînt invariante la acțiunea lui* A; *anume,* $W^{\pm}(D(B)) \subset D(A)$ *și* $AW^{\pm}x = W^{\pm}Bx$ *dacă* $x \in D(B)$.

(3) $H_{\pm} \subset H_A$.

Demonstrație. Dacă $x \in H_B^{\perp}$, atunci $W^{\pm}x = 0$, din definiție. Dacă $x \in H_B$, folosind faptul că e^{itA} și e^{-itB} sînt operatori unitari (lema 3.7.4) obținem

$$\| e^{itA} e^{-itB} P_B x \| = \| x \|$$

oricare ar fi $t \in \mathbf{R}$, ceea ce implică afirmația (1).

Fie apoi $s \in \mathbf{R}$ fixat. Atunci, din egalitatea

$$\lim_{t \to \mp\infty} e^{itA} e^{-itB} P_B x = \lim_{t \to \mp\infty} e^{i(t+s)A} e^{-i(t+s)B} P_B x,$$

obținem că $W^{\pm} = e^{isA} W^{\pm} e^{-isB}$, adică

$$e^{-isA} W^{\pm}(A, B) = W^{\pm}(A, B) e^{-isB}.$$

Din această relație pe baza corolarului 3.7.6, printr-o operație simplă de integrare deducem

$$(\mu - A)^{-1} W^{\pm}(A, B) = W^{\pm}(A, B)(\mu - B)^{-1} \tag{5.3.2}$$

pentru orice $\mu \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$. Fixînd un asemenea μ, pentru orice $x \in D(B)$ putem scrie

$$(\mu - A)^{-1} W^{\pm}(A, B)(\mu - B)x = W^{\pm}(A, B)x,$$

ceea ce ne arată că $W^{\pm}x \in D(A)$ și $W^{\pm}(\mu - B)x = (\mu - A)W^{\pm}x$, adică afirmația (2).

În baza egalității (5.3.2) și a lemei 5.3.4, mai obținem și incluziunea $W^{\pm}(H_B) \subset H_A$, adică afirmația (3).

5.3.7. PROPOZIȚIE. *Fie $A, B, C \in \mathscr{C}(H)$ operatori autoadjuncți și să presupunem că operatorii $W^{\pm}(A, B)$ și $W^{\pm}(B, C)$ există. Atunci există și operatorii $W^{\pm}(A, C)$ și avem egalitatea $W^{\pm}(A, C) = W^{\pm}(A, B)W^{\pm}(B, C)$.*

Demonstrație. Propoziția 5.3.6(3) ne spune că $R(W^{\pm}(B, C)) \subset H_B$, prin urmare

$$\lim_{t \to \mp\infty} \|(1 - P_B)e^{itB}e^{-itC}P_C x\| = 0$$

oricare ar fi $x \in H$. Vom putea scrie deci

$$\lim_{t \to \mp\infty} e^{itA}e^{-itC}P_C x = \lim_{t \to \mp\infty} e^{itA}e^{-itB}P_B e^{itB}e^{-itC}P_C x +$$

$$+ \lim_{t \to \mp\infty} e^{itA}e^{-itB}(1 - P_B)e^{itB}e^{-itC}P_C x =$$

$$= W^{\pm}(A, B)\ W^{\pm}(B, C)x,$$

ceea ce este posibil pe baza primei observații și a faptului că familiile de operatori $\{e^{itA}\}_t$, $\{e^{itB}\}_t$ și $\{e^{itC}\}_t$ sînt uniform mărginite.

5.3.8 DEFINIȚIE. Să presupunem că operatorii $W^{\pm}(A, B)$ există. Acești operatori se numesc *completi* dacă $H_+ = H_- = H_A$.

5.3.9. OBSERVAȚIE. Completitudinea operatorilor $W^{\pm}(A, B)$ are o semnificație fizică importantă [14]. Din punct de vedere matematic proprietatea de completitudine exprimă, în particular, faptul că operatorul

$$S = (W^{-}(A, B))^* W^{+}(A, B)$$

este unitar pe spațiul H_B, ceea ce se vede ușor datorită propoziției 5.3.6(1). Operatorul S poartă numele de *operator de difuzie*.

Problema completitudinii este de fapt echivalentă cu o problemă de existență.

5.3.10. PROPOZIȚIE. *Să presupunem că operatorii $W^{\pm}(A, B)$ există. Acești operatori sînt completi dacă și numai dacă operatorii $W^{\pm}(B, A)$ există.*

Demonstrație. Să presupunem că operatorii $W^{\pm}(A, B)$ și $W^{\pm}(B, A)$ există. În baza propoziției 5.3.7 avem

$$P_A = W^{\pm}(A, A) = W^{\pm}(A, B)W^{\pm}(B, A),$$

prin urmare $H_A \subset R(W^{\pm}(A, B))$. Incluziunea inversă fiind dată de propoziția 5.3.6(3), avem egalitate.

Invers, să presupunem că operatorii $W^{\pm}(A, B)$ există și sînt completi. Fie $y \in H_A$. Există atunci $x_{\pm} \in H$ astfel încît $y = W^{\pm}(A, B)x_{\pm}$. În plus,

$$\lim_{t \to \mp\infty} \|e^{itB}e^{-itA}y - P_B x_{\pm}\| = \lim_{t \to \mp\infty} \|y - e^{itA}e^{-itB}P_B x_{\pm}\| = 0,$$

în care am folosit faptul că e^{itB} și e^{-itA} sînt unitari. Așadar, $W^{\pm}(B, A)$ există.

Rezultatul cu care încheiem acest paragraf reprezintă o metodă de demonstrare a existenței operatorilor de undă, datorată lui Cook.

5.3.11. TEOREMĂ. *Fie* $A, B \in \mathscr{C}(H)$ *operatori autoadjuncți și să presupunem că există o mulțime* $M \subset D(B) \cap H_B$, M *densă în* H_B, *astfel încît pentru orice* $x \in M$ *să se poată găsi un număr* $\delta(x) > 0$ *cu următoarele proprietăți*:

(1) $e^{itB}x \in D(A)$ *dacă* $|t| > \delta(x)$.

(2) *Funcțiile* $t \to Ae^{\pm itB}x$ *sînt continue pe* $(\delta(x), +\infty)$.

(3) $\int_{\delta(x)}^{+\infty} \|(B - A)e^{\pm itB}x\| \, dt < \infty$.

Atunci operatorii de undă $W^{\pm}(A, B)$ *există.*

Demonstrație. Fie $x \in M$ și fie funcția $h(t) = e^{itA}e^{-itB}x$. Folosind ipotezele și un argument din lema 3.7.4, deducem

$$h'(t_0) = \lim_{t \to t_0} (t - t_0)^{-1}(h(t) - h(t_0)) =$$

$$= \lim_{t \to t_0} e^{itA}(t - t_0)^{-1}(e^{-itB}x - e^{-it_0B}x) +$$

$$+ \lim_{t \to t_0}(t - t_0)^{-1}(e^{itA} - e^{it_0A})\, e^{-it_0B}x = -ie^{it_0A}(B - A)\, e^{-it_0B}x,$$

pentru orice punct fixat $t_0 \in (\delta(x), +\infty)$. Cu alte cuvinte, funcția vectorială h este derivabilă în intervalul $(\delta(x), +\infty)$. În plus, derivata h' este o funcție continuă. Într-adevăr, funcția $Ae^{-itB}x$ fiind continuă prin ipoteză, continuitatea funcției h' se obține ușor din proprietățile generale de continuitate ale semigrupurilor de operatori. Folosind varianta vectorială a formulei Leibniz-Newton (observația 1.1.8.2°; formula clasică Leibniz-Newton poate fi găsită în [4], cap. 5, § 4), avem pentru $s > t > \delta(x)$ estimarea

$$\|h(s) - h(t)\| \leqslant \int_t^s \|h'(u)\| \, du = \int_t^s \|(B - A)e^{-itB}x\| \, du$$

ceea ce arată că

$$\lim_{t \to +\infty} e^{itA}e^{-itB}P_Bx = \lim_{t \to +\infty} e^{itA}e^{-itB}x$$

există, în baza condiției (3). Mulțimea M fiind densă în H_B, această limită există pentru orice element $x \in H_B$, pe baza densității mulțimii M în H_B și a mărginirii uniforme a familiilor $\{e^{itA}\}_t$ și $\{e^{itB}\}_t$. Existența limitei este trivială pentru $x \in H^{\perp}$, deci operatorul $W^{-}(A, B)$ există.

Existența operatorului $W^{+}(A, B)$ se obține asemănător.

O amplă discuție privind operatorii de undă și rolul lor în teoria difuziei se află în lucrarea [14], vol. III. Condiția (2) din teorema 5.3.11, impusă pentru simplitate, nu este necesară. Afirmația teoremei rezultă numai din condițiile (1) și (3) (a se vedea, de exemplu [8], XX.5.1).

5.4. ASPECTE ALE FORMALISMULUI MECANICII CUANTICE

În mecanica cuantică fiecărui sistem fizic i se asociază, într-o primă aproximație, un spațiu Hilbert separabil H. Un vector $x \in H$ cu $\|x\| = 1$ reprezintă o *stare* a sistemului fizic (de altfel, în acest punct de vedere, nu se face distincție între x și λx, unde $\lambda \in \mathbf{C}$, $|\lambda| = 1$). Mărimile fizice care se pot măsura, numite *observabile*, sînt reprezentate de operatori autoadjuncți (nu neapărat mărginiți) în H.

Presupunînd că sistemul fizic dat se află în starea x, observabila A poate fi cunoscută doar prin măsura pozitivă $p(x, A, \cdot) = \langle E_A(\cdot)x, x\rangle$ pe Bor ($\mathbf{R}$), unde E_A este măsura spectrală a lui A. Deoarece $p(x, A, \mathbf{R}) = 1$ (căci $\|x\| = 1$), măsura $p(x, A, \cdot)$ este o măsură de probabilitate pe $\mathbf{R}$.

Să presupunem că $\sigma(A, H) = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, unde λ_k sînt valori proprii ale lui A (aceasta corespunde faptului că respectiva mărime fizică nu poate lua decît valori particulare, cum se întîmplă, de exemplu, în cazul energiei). Dacă notăm cu $P_k = E_A(\{\lambda_k\})$, obținem

$$p(x, A, S) = \sum_{\lambda_k \in S} \|P_k x\|^2, \quad S \in \mathrm{Bor}(\mathbf{R}).$$

În particular, observabila A ia valoarea λ_k cu probabilitatea $\|P_k x\|^2$ ($= p(x, A, \{\lambda_k\})$).

Dacă observabila A are spectru arbitrar, vom putea vorbi, în general, doar de probabilitatea de a obține o valoare $\lambda \in [\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon]$, care va fi $p(x, A, [\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon])$. Cu alte cuvinte, dacă sistemul fizic se află în starea x, atunci observabila A ia valoarea $\lambda \in S [S \in \mathrm{Bor}(\mathbf{R})]$ cu probabilitatea $p(x, A, S)$.

5.4.1. DEFINIȚIE. Să presupunem că un sistem fizic se află în starea x și fie A o observabilă cu măsura spectrală E_A. Atunci, pentru orice $S \in \mathrm{Bor}(\mathbf{R})$, după efectuarea unei măsurări asupra observabilei A care a dat valoarea $\lambda \in S$, starea sistemului fizic va fi dată, prin definiție, de vectorul

$$y = E_A(S)x / \|E_A(S)x\|$$

(care are sens deoarece probabilitatea $p(x, A, S)$ este pozitivă).

Definiția 5.4.1 este fundamentală în axiomatica mecanicii cuantice.

Din ea obţinem uşor

$$p(y, A, L) = p(x, A, S \cap L)/p(x, A, S), \quad L \in \mathrm{Bor}(\mathbf{R}),$$

ceea ce arată condiţionarea măsurii de probabilitate $p(y, A, \cdot)$ în raport cu mulţimea S. Vom discuta şi alte consecinţe ale definiţiei 5.4.1.

Să presupunem că sistemul fizic se află în starea x şi să considerăm două observabile A şi B, cu măsurile spectrale E_A, respectiv E_B. Efectuînd o măsurare asupra observabilei A care a dat o valoare $\lambda \in S[S \in \mathrm{Bor}(\mathbf{R})]$, în baza definiţiei 5.4.1 starea sistemului fizic devine $y = E_A(S)x/\|E_A(S)x\|$. Efectuînd apoi o măsurare asupra observabilei B care a dat o valoare $\nu \in L(L \in \mathrm{Bor}(\mathbf{R}))$, starea sistemului fizic devine

$$E_B(L)y/\|E_B(L)y\| = E_B(L)E_A(S)x/\|E_B(L)E_A(S)x\|.$$

5.4.2. DEFINIŢIE. Observabilele A şi B se numesc *simultane* dacă starea sistemului după efectuarea unei măsurări asupra observabilei A urmată de una efectuată asupra observabilei B coincide cu starea sistemului care se obţine efectuînd mai întîi o măsurare asupra observabilei B, urmată de o măsurare asupra observabilei A.

Cu alte cuvinte, observabilele A şi B sînt simultane dacă şi numai dacă

$$\frac{E_B(L)E_A(S)x}{\|E_B(L)E_A(S)x\|} = \frac{E_A(S)E_B(L)x}{\|E_A(S)E_B(L)x\|}, \tag{5.4.1}$$

oricare ar fi starea x şi mulţimile boreliene S, L din $\mathbf{R}$ (probabilităţile implicate sînt presupuse pozitive, deci relaţia are sens).

5.4.3. PROPOZIŢIE. *Observabilele A şi B sînt simultane dacă şi numai dacă operatorii autoadjuncţi A şi B comută.*

Demonstraţie. Este limpede că dacă operatorii A şi B comută (definiţia 3.8.4), observabilele A şi B sînt simultane. Va fi suficient să obţinem afirmaţia inversă. Fie, pentru simplitate, $P = E_A(S)$ şi $Q = E_B(L)$. Relaţia (5.4.1) se scrie atunci sub forma

$$\|PQx\|\, QPx = \|QPx\|\, PQx. \tag{5.4.2}$$

Înmulţind scalar egalitatea (5.4.2) cu vectorul PQx, obţinem după o simplificare

$$\langle QPx, PQx\rangle = \langle (QP)^2 x, x\rangle = \langle x, (PQ)^2 x\rangle = \|PQx\|\,\|QPx\|,$$

relație care ne arată că operatorii $(QP)^2$, $(PQ)^2$ sînt pozitivi și $(PQ)^2 = (QP)^2$. Din această egalitate obținem $(PQ)^2 = PQP$; asemănător $(QP)^2 = QPQ$, de unde $PQP = QPQ$.

Să notăm $R = PQ - QP$. Pe baza egalităților obținute deducem $R^2 = (PQ)^2 + (QP)^2 - PQP - QPQ = 0$. În plus, $R^* = -R$, ceea ce ne permite să scriem

$$\| Rx \|^2 = \langle R^* Rx, x \rangle = - \langle R^2 x, x \rangle = 0,$$

adică $R = 0$. Mulțimile S și L fiind arbitrare, putem conchide că operatorii A și B comută.

Ne vom ocupa în continuare de cazul în care observabilele A și B nu comută. Să facem mai întîi notațiile

$$m(A,x) = \int_{\mathbf{R}} \lambda \mathrm{d}\langle E_A(\lambda)x, x \rangle = \langle Ax, x \rangle,$$

$$v(A, x) = \int_{\mathbf{R}} (\lambda - m(A, x))^2 \, \mathrm{d}\langle E_A(\lambda)x, x \rangle = \| Ax \|^2 - \langle Ax, x \rangle,$$

în care presupunem, evident, că $x \in D(A)$. Să remarcăm că mărimile introduse se pot calcula numai cu ajutorul observabilei A, fără a cunoaște explicit măsura spectrală a acesteia.

Considerînd apoi observabilele arbitrare A și B, vom introduce *comutatorul* lor $[A, B]$ ca fiind operatorul $AB - BA$ definit pe spațiul liniar $D([A, B]) = D(AB) \cap D(BA)$. Rezultatul care urmează este cunoscut ca *inegalitatea lui Heisenberg.*

5.4.4. PROPOZIȚIE. *Pentru orice stare* $x \in D([A, B])$ *are loc inegalitatea*

$$v(A, x)\, v(B, x) \geqslant |\langle [A, B]x, x \rangle|^2/4. \tag{5.4.3}$$

Demonstrație. Deoarece

$$\langle [A, B]x, x \rangle = \langle Bx, Ax \rangle - \langle Ax, Bx \rangle = 2i \operatorname{Im} \langle Bx, Ax \rangle,$$

obținem evaluarea

$$|\langle [A, B]x, x \rangle|^2 \leqslant 4 \| Ax \|^2 \, \| Bx \|^2.$$

Vom înlocui în această inegalitate operatorul A cu $A - m(A, x)$ și operatorul B cu $B - m(B, x)$. Atunci $\| Ax \|^2$ se va înlocui cu $\| Ax - m(A, x)x \|^2 = v(A, x)$ iar $\| Bx \|^2$ se va înlocui cu $v(B, x)$. Întrucît această înlocuire nu afectează comutatorul, inegalitatea de mai sus devine

$$|\langle [A, B]x, x \rangle|^2 \leqslant 4 v(A, x)\, v(B, x),$$

adică tocmai estimarea (5.4.3).

5.4.5. EXEMPLU. Pentru a se studia mişcarea liberă a unei particule pe dreapta reală, se consideră spaţiul Hilbert $H = L^2(\mathbf{R})$. Se introduc apoi *operatorul de poziţie*, notat cu Q, şi *operatorul de impuls*, notat cu P. Aceşti operatori sînt iniţial definiţi pe aşa-numitul *spaţiu Schwartz* $\mathscr{S}(\mathbf{R})$, format din funcţiile indefinit derivabile, cu descreştere rapidă. Mai precis, $f \in \mathscr{S}(\mathbf{R})$ dacă şi numai dacă

$$\sup_{s \in \mathbf{R}} | s^m f^{(n)}(s) | < \infty,$$

oricare ar fi numerele întregi $m \geqslant 0$ şi $n \geqslant 0$. Este uşor de văzut că $\mathscr{S}(\mathbf{R}) \subset \subset L^2(\mathbf{R})$. Operatorul Q se defineşte atunci prin relaţia $Q\varphi(s) = s\varphi(s)$ $(s \in \mathbf{R})$ iar operatorul P prin egalitatea $P\varphi(s) = -\mathrm{i}(\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}s)(s)$ $(s \in \mathbf{R})$ pentru orice $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbf{R})$. Ambii operatori P şi Q admit extensii autoadjuncte (exerciţiile 3.9.3 şi 3.9.8). În plus, $[P, Q]\varphi = -\mathrm{i}\varphi$ pentru orice $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbf{R})$. Inegalitatea lui Heisenberg ne permite atunci să scriem $v(P, \varphi)\, v(Q, \varphi) \geqslant 1/4$ pentru orice stare $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbf{R})$. Acest fapt ne arată că dacă poziţia particulei este cunoscută cu o anumită precizie, de exemplu dacă $v(Q, \varphi) \leqslant \varepsilon$, atunci viteza particulei nu poate fi bine determinată deoarece avem neapărat $v(P, \varphi) \geqslant 1/(4\varepsilon)$. Acesta este şi motivul pentru care inegalitatea (5.4.3) mai poartă în acest caz numele de *relaţia de incertitudine a lui Heisenberg*.

Utilizarea conceptului de *transformata Fourier* permite descrierea completă a operatorului P (mai precis a extensiei sale autoadjuncte) Tot conceptul de transformată Fourier explică, din punct de vedere matematic, dualismul particulă-undă. Asemenea detalii pot fi găsite în lucrarea [3], cap. 6.

Analiza evoluţiei în timp a sistemelor cuantice (aşa-numita *dinamică cuantică*) conduce, prin acceptarea unor ipoteze simplificatoare, la un obiect matematic familiar nouă, anume acela de semigrup unitar de operatori pe spaţiul Hilbert H. Mai precis, se poate deduce existenţa unui semigurp unitar $\{U(t)\}_{t \geqslant 0}$ ataşat sistemului în evoluţie, care are următoarea semnificaţie : dacă starea sistemului fizic la momentul $t = t_1$ este x, atunci starea sistemului la momentul $t = t_2$ va fi dată de $U(t_2 - t_1)x$ (aici se reflectă atît aspectul deterministic al fenomenelor fizice cît şi ipoteza, nu întotdeauna verificată, conform căreia sistemul evoluează fără memorie a trecutului, exprimată prin dependenţa doar de diferenţa $t_2 - t_1$). În baza teoremei 3.7.5, deducem existenţa unui operator autoadjunct $X \in \mathscr{C}(H)$ astfel încît să avem $U(t) = \exp(-\mathrm{i}tX)$ $(t \geqslant 0)$. Operatorul X se numeşte *operatorul de energie* sau *hamiltonianul* sistemului. Acest operator ne permite să descriem evoluţia sistemului cu ajutorul unei anumite ecuaţii diferenţiale. Pentru a vedea acest lucru, să presupunem că starea sistemului la momentul $t = 0$ este x Din consideraţiile de mai sus, starea sistemului la momentul t va fi dată de egalitatea $x(t) = \exp(-\mathrm{i}tX)x$. Ea satisface deci ecuaţia diferenţială

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{i}Xx(t), \quad x(0) = x, \tag{5.4.4}$$

ceea ce rezultă din teoria generală a semigrupurilor.

Ecuaţia (5.4.4) poartă numele de *ecuaţia Schrödinger* (în formă abstractă).

Fie acum A o observabilă arbitrară. În principiu, observabila A nu se modifică în timp. Dacă o asociem sistemului evolutiv considerat, măsura de probabilitate $p(x(t), A, \cdot)$ va depinde, în general, de parametrul t. Să remarcăm egalitatea

$$p(x(t), A, S) = \langle U(t)^{-1} E_A(S) U(t)\, x, x \rangle, \quad S \in \mathrm{Bor}(\mathbf{R}). \tag{5.4.5}$$

5.4.6. DEFINIȚIE. Vom spune că observabila A este *X-staționară* dacă măsura de probabilitate $p(x(t), A, \cdot)$ nu depinde de timpul t.

5.4.7. PROPOZIȚIE. *Observabila A este X-staționară dacă și numai dacă operatorii A și $\boldsymbol{X}$ comută.*

Demonstrație. Rezultatul este, în fapt, o condiție echivalentă cu cele din teorema 3.8.5. Dacă operatorii A și $\boldsymbol{X}$ comută, deci dacă măsurile lor spectrale comută, printr-o operație de integrare (via teorema 3.7.5) deducem că $E_A(S)U(t) = U(t)E_A(S)$ pentru orice $t \geqslant 0$ și $S \in \mathrm{Bor}(\mathbf{R})$, deci membrul stîng din (5.4.5) nu depinde de t.

Reciproc, dacă membrul stîng în (5.4.5) nu depinde de t, atunci va trebui să avem $U(t)^{-1}E_A(S)U(t) = E_A(S)$, oricare ar fi $t \geqslant 0$ și $S \in \mathrm{Bor}(\mathbf{R})$, adică $E_A(S)U(t) = U(t)E_A(S)$. Utilizînd această proprietate de comutare, printr-o operație de integrare (folosind din nou teorema 3.7.5), obținem îndeplinirea condiției (3) din teorema 3.8.5, deci comutarea operatorilor A și B.

Încheiem aici sumara trecere în revistă a unor aspecte ale formalismului mecanicii cuantice, legate de rezultatele de teoria operatorilor conținute în prezenta lucrare. Cititorul interesat poate găsi mai multe detalii cu privire la mecanica cuantică în alte lucrări, în particular în [3], cap. 6.

INDEX ALFABETIC

Acoperire 8
— deschisă 9
aderenţă 8
aditivitate numărabilă 76
— slabă 76
— tare 75
adjunct 18, 103
algebră Banach 24
— normată 24
algebre izomorfe 73
apartenenţă 7
aplicaţie boreliană 34
— deschisă 179
— liniară continuă 16
— mărginită 17

Bază ortonormală 14

C*-algebră 71
calculul funcţional analitic 50
— — cu funcţii continue 94
capacitate spectrală 102
caracter al unei algebre 25
clasa operatorilor Hilbert-Schmidt 165
— — nucleari 165
— Schatten-von Neumann 159
clase de echivalenţă 178
compactificare a planului complex 9
complement ortogonal 13
completat al unui spaţiu 14
comutator 197
conjugare 146
continuitate a unor aplicaţii 91
contur admisibil 46
conervgenţa unui şir 10
criteriu de compacitate 177
curbă jordaniană rectificabilă 39

Descompunerea spaţiului 13
diferenţă 7
— de ordinul k 148
dinamică cuantică 198
distanţă 9
domeniu de definiţie 15
— al valorilor 15
dual 17

Ecuaţia lui Schrödinger 199
ecuaţie rezolvantă 44
element idempotent 53
— nul 12
elemente ortogonale 13
extensie a unui operator 16

Familie egal continuă 177
formula lui Cauchy 40
— — — la infinit 43
— schimbării variabilei de integrare 66
frontiera mulţimii 3
funcţie analitică 37
— — la infinit 41
— boreliană 21
— continuă 8
— etajată 21
— Green 190
— integrabilă 22
— numărabil aditivă de mulţime 19
— olomorfă 37
— rezolvantă 44
— simplă 21
— subaditivă 125
funcţională continuă 17
— liniară 17
— pozitivă 24

Generator infinitezimal 127
grafic al unei aplicaţii 15
grup abelian 101

Hamiltonian 199

Idempotent 53
imagine 15
indice de defect 118
index 168
incluziune 7
inegalitatea lui Hölder 163
— — Heisenberg 197
— — Minkovski 163
— — Schwarz 12
integrală curbilinie 40
— în raport cu o măsură 31
— — — — spectrală 76
interior 8
intervertirea operatorilor normali 87

inversul unui operator 16
involuție 71
iteratele unui operator 16
intersecție 7
izometrie 11
— parțială 118

Lema lui Auerbach 169
— — Fatou 23
— — Riesz 155
limită a unui șir 10

Mărime fizică observabilă 196
măsură 20
— pozitivă 20
— produs 29
— Radon 20
— regulată 20
— scalară atașată măsurii spectrale 80
— spectrală 75
— — atașată operatorului autoadjunct 113
— — a unui operator normal 90
medie invariantă pe grup 101
metrică 9
modul minimal redus 166
multiplicitatea valorii proprii 157
mulțime deschisă 7
— închisă 7
— mărginită 17
— rezolvantă 44

Normă 11
— operatorială 55
norme echivalente 25
numere caracteristice 159
nucleu 15
— integral 183

Observabilă 196
— X-staționară 199
observabile simultane 196
omeomorfism 8
omogenitatea pozitivă a normei 11
omomorfism de C*-algebre 72
operator 15
— adjunct 18, 103
— autoadjunct 18, 106
— compact 151
— cu imagine închisă 165
— — rezolvantă compactă 157
— decompozabil 102
— de difuzie 194
— — energie 199
— — impuls 198
— — pzoiție 198
— — rang finit 151
— — undă 193
— — — complet 194
— Fredholm 168
— integral 183
operator închis 16
— liniar 15
— — dens definit 103
— esențial autoadjunct 144
— mărginit inferior 121
— — superior 125
— negativ 121
— normal 18
— pozitiv 100
— preînchis 16
— rădăcină pătrată 100
— semimărginit 121
— simetric 117
— Sturm-Liouville 189
— unitar 18
— Volterra 179
operatori unitar echivalenți 99

Parte compactă 9
— relativ compactă 9
partiție a unității subordonate acoperirii deschise 100
principiul mărginirii uniforme 17
problema subspațiilor invariante 181
procedeu de ortogonalizare Gram-Schmidt 27
produs scalar 12
proiector 53
— spectral 69
proiecție a unui element 13
— — — spațiu 13
— paralelă 180
— stereografică 9
proprietatea intersecției finite 26
proprietate μ-aproape peste tot 23
punct aderent 8
— interior 8
— regulat 69
— singular 69
puterile unui operator 16

Raza de convergență 37
— spectrală 25
rădăcină pătrată 100
relația de incertitudine a lui Heisenberg 198
relație de polarizare 27
reprezentare 102
— mărginită 102
restricția topologiei 8
reuniune 7
rezolvantă 44

Semigrup tare continuu 125
— uniform continuu 125
serie formală 37
sfera lui Riemann 10
sferă 10
σ-algebră 20
— — boreliană 21
$\sigma(E, \Gamma)$-topologie 19
singularitate 69

sistem de curbe jordaniene rectificabile pozitiv orientat 40
— fundamental de vecinătăţi 19
— ortogonal 14
— Sturm-Liouville 189
spaţii Hilbert unitar echivalente 28
— invariante netriviale 181
— izometrice 11
— omeomorfe 8
spaţiu absolut continuu 192
— Banach 12
— bidual 181
— compact 8
— cît 178
— dual 17
— factor 178
— final 118
— Hilbert 13
— iniţial 118
— metric 10
— — complet 10
— — separat 10
— normat 12
— prehilbertian 13
— reflexiv 28
— Schwartz 198
— topologic 7
— — separat 8
— — Hausdorff 8
— — local compact 9
spectru al unui element 25
— — — operator 53, 57
— extins 58
stabilitatea indexului 173, 174
stare 195
subaditivitatea normei 12
sub-C*-algebră 73
— — — cu unitate 73
submultiplicativitatea normei 24
submulţime densă 10
— total mărginită 11
subspaţiu total 19
sumă directă de spaţii 13
— — ortogonală a spaţiilor 13
suport al unei aplicaţii 92
— — — funcţii 67
— compact 92

Şir Cauchy 10
— convergent 10
— intr-o măsură 22
— fundamental 10
— — asociat 123
— slab convergent 145
— tare convergent 145
— uniform convergent 145

Teorema aplicaţiei deschise 179
— — spectrului 51
— de compactificare a lui Alexandrov 9
— — compunere a calculului funcţioinal analitic 51
— — convergenţă dominată a lui Lebesgue 23
— — reprezentare a lui Riesz 24
— — schimbare de variabilă 79
— — stabilitate a indexului 173, 174
— graficului închis 16
— lui Fubini 29
— — Liouville 41
— — Zorn 14
— spectrală pentru operatorii autoadjuncţi (nemărginiţi) 109
topologie 7
— metrică 10
— naturală 7
— indusă 8
— separată 7
— slabă 19
transformata Cayley 119
— Fourier 198
— Ghelfand 26

Valoare proprie 154
variaţie totală a unei măsuri 20
vecinătate a unei mulţimi 8
— — unui punct 8
vector absolut continuu 192
— propriu 154

Wronskian 190

BIBLIOGRAFIE

a) Lucrări citate în text

1. **Boboc, N.** *Funcţii complexe* Bucureşti, Editura Didactică şi Pedagogică, 1969.
2. **Bourbaki, N.** *Théories spectrales.* Paris, Hermann, 1967.
3. **Buchwalter, H., Tarral D.,** *Théorie spectrale.* Lyon, Université Claude Bernard, Publications du Département de Mathématiques, 1982.
4. **Colojoară, I.,** *Analiză matematică.* Bucureşti, Editura Didactică şi Pedagogică, 1983.
5. **Cristescu, R.,** *Analiză funcţională.* Bucureşti, Editura Didactică şi Pedagogică, 1979.
6. **Dixmier J.,** *Les C*-algèbres et leurs représentations.* Paris, Gauthier-Villars, 1969.
7. **Douglas, R. G.,** *Banach algebra techniques in operator theory.* New York, Academic Press, 1972.
8. **Dunford, N., Schwartz, J. T.,** *Linear operators,* Part I, 1958; Part II, 1963, Interscience Publishers; Part III, 1971, New York, Wiley-Interscience.
9. **Gohberg, I., Goldberg, S.,** *Basic operator theory,* Birkhäuser, Basel, 1981.
10. **Halmos, P. R.,** *Measure theory.* Van Nostrand, Princeton, 1950.
11. **Kuratowski, K., Mostowski, A.,** *Set theory.* North-Holland, Amsterdam, 1967.
12. **Nicolescu, M.,** *Analiză matematică,* I, 1957; II, 1958; III, 1960. Bucureşti, Editura Tehnică.
13. **Pearcy C.,** (editor). *Topics in operator theory.* Mathematical Surveys 13, American Mathematical Society, Providence, 1974.
14. **Reed, M., Simon, B.,** *Methods of modern mathematical physics.* I: Functional analysis, Academic Press, New York, 1972; II: Fourier analysis, self-adjointness, ibidem, 1975; III: Scattering theory, ibidem, 1979; IV: Analysis of operators, ibidem, 1978.
15. **Schwartz, J. T.,** *Nonlinear functional analysis.* New York, Gordon and Breach, 1969.
16. **Vasilescu, F.-H.,** *Analytic functional calculus and spectral decompositions.* Bucureşti, Editura Academiei R.S.R., D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1982.

b) Alte lucrări recomandate de autor

1. **Gohberg, I., Krein, M. G.,** *Vvedenie v teoriu lineinîh nesamosopriajiennîh operatorov.* Moscova Nauka, 1965.
2. **Greenleaf, F. P.,** *Invariant means of topological groups and their applications.* New York, Van Nostrand, Reinhold Company, 1969.
3. **Kato, T.** *Perturbation theory for linear operators.* New York, Springer-Verlag, 1966.
4. **Mackey, G. M.,** *The mathematical foundations of quantum mechanics.* New York, Benjamin Inc., 1963.
5. **Marineseu G.,** *Spaţii vectoriale normate.* Bucureşti, Editura Academiei, 1956.
6. **Pólya, G., Szegö G.,** *Problems and theorems in analysis.* Berlin, Springer-Verlag, 1972.
7. **Read, C. J.,** *A solution to the invariant subspace problem.* Bull. London Math. Soc., 16(1984), 337—401.
8. **Riesz, F., Nagy B. Sz.** *Leçons d'analyse fonctionelle.* Budapest, Akadémiai Kiadó, 1952.

INITIATION IN OPERATOR THEORY

SUMMARY

The present work is an introduction to some of the basic topics of the linear operator theory. It is an improved and expanded (written) version of the special course in operator theory delivered by the author at the Faculty of Mathematics of the University of Bucharest. The work is divided into six chapters, whose contents will be briefly described in the following.

The preliminary chapter contains the main concepts and results to be used in the sequel. The proofs are omitted but proper quotations are made after the statements.

The first chapter (strictly speaking) deals with the construction of the analytic functional calculus for elements in Banach algebras, as well as its version for unbounded operators. As a matter of fact, the analytic functional calculus is regarded as the unifying concept of the work.

The next chapter is dedicated to the study of the spectral representation of normal operators. An extension of this concept in Banach spaces (with respect to the functional calculus) is also included.

The integral representation of unbounded self-adjoint operators is the main topic dealt with in the third section. It also contains results concerning extensions of symmetric operators and strongly continuous semi-groups of operators.

The fourth chapter presents some important classes of linear operators, in particular compact and Fredholm operators.

The last chapter includes a few from the numerous applications of operator theory: the solution of some integral equations; differential operators of Sturm-Liouville type; wave operators and some aspects of the quantum mechanics formalism.

Each chapter but the last one is accompanied by a section of exercises and comments.

The book is recommended to those who want to learn some basic facts of operator theory, as well as those interested to apply operator theory in mathematical physics and other areas of knowledge.

The author graduated from the Faculty of Mathematics of the University of Bucharest in 1965, and received his Ph. D. from the same university in 1969. He has published over 65 research papers in various journals of mathematics, both in Romania and abroad, and two monographs. He is currently senior researcher at the Department of Mathematics, INCREST, Bucharest.

Redactor: VALENTINA CREȚU
Tehnoredactor: V. E. UNGUREANU

Bun de tipar: 02.02.1987. Coli de tipar: 13
C.Z.: 517.98

I. P. Informația
Str. Brezoianu nr. 23—25,
București, c. 788